

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 44**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine partea reală a numărului complex $z = \frac{1-i}{1+i}$.
- 5p** 2. Să se determine valorile reale ale lui m pentru care $x^2 + mx + 1 \geq 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\arcsin 2x = -\frac{1}{2}$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Să se determine numărul submulțimilor mulțimii A care au 5 elemente, din care exact două sunt numere pare.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $B(-1, 2)$ și $C(2, -2)$. Să se determine distanța de la punctul O la dreapta BC .
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{ctg} \alpha$.

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $AB + BA$.

5p b) Să se arate că $\text{rang}(A + B) = \text{rang } A + \text{rang } B$.

5p c) Să se demonstreze că $(A + B)^n = A^n + B^n, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + 4X^2 + 1 \in \mathbb{C}[X]$ cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se determine $a \in \mathbb{C}$ astfel încât polinomul f să se dividă cu $X + 1$.

5p b) Să se arate că polinomul $g = X^4 + 4X^2 + aX + 1$ are rădăcinile $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \frac{1}{x_3}, \frac{1}{x_4}$.

5p c) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{C}$, polinomul f nu are toate rădăcinile reale.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+x+1}}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a = 2b > 0$.

5p c) Pentru $a = 2$ și $b = 1$, să se determine mulțimea valorilor funcției f .

2. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^x e^{\arcsin t} dt$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict monotonă.

5p b) Să se arate că $f(x) = \int_0^{\arcsin x} e^t \cos t dt$, $\forall x \in [-1, 1]$.

5p c) Să se determine $f(1)$.