

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 43**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine valoarea de adevăr a propoziției: „Suma oricăror două numere iraționale este număr irațional.”
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 2$. Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = f^2(x)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^x = 12$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din mulțimea $A \times A$, produsul numerelor a și b să fie impar.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(1, 3)$ și $C(-1, 1)$. Să se calculeze aria pătratului de diagonală AC .
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 105^\circ + \sin 75^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 43**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră mulțimea $M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{N} \right\}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M$.

5p a) Câte matrice din mulțimea M au suma elementelor egală cu 1?

5p b) Să se arate că $A^{-1} \notin M$.

5p c) Să se determine toate matricele inversabile $B \in M$ care au proprietatea $B^{-1} \in M$.

2. Se consideră ecuația $x^4 - 8x^3 + ax^2 + 8x + b = 0$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și cu soluțiile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se arate că $(x_1 + x_4)(x_2 + x_3) + x_1x_4 + x_2x_3 + (x_1 + x_4)x_2x_3 + (x_2 + x_3)x_1x_4 = a - 8$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$.

5p c) Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât x_1, x_2, x_3, x_4 să fie în progresie aritmetică.

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $[0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f admite exact un punct de extrem local.

5p c) Să se determine numărul de soluții reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un număr real oarecare.

2. Fie funcțiile $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{1+t^2} dt$ și $g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_1^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$.

5p a) Să se calculeze $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

5p b) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

5p c) Să se arate că $f(x) + g(x) = 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.