

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 41**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $100^{\lg 2} + \sqrt[3]{-27}$ este natural.
- 5p** 2. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+1} = -3^x + 8$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ care au proprietatea că $f(1) + f(3) = 7$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$ și $B(-1, 1)$. Să se determine ecuația dreptei care trece prin originea axelor și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Fie a și b numere reale astfel încât $\sin a + \sin b = 1$ și $\cos a + \cos b = \frac{1}{2}$. Să se calculeze $\cos(a - b)$.

1. Pentru $p, q, r \in \mathbb{C}$, se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + py + p^2z = p^3 \\ x + qy + q^2z = q^3 \\ x + ry + r^2z = r^3 \end{cases}.$$

5p a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.

5p b) Dacă p, q, r sunt distincte, să se rezolve sistemul.

5p c) Să se arate că, dacă sistemul are soluția $(-1, 1, 1)$, atunci cel puțin două dintre numerele p, q, r sunt egale.

2. Se consideră inelul $(A, +, \cdot)$ unde $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii A .

5p b) Să se rezolve în mulțimea A ecuația $X^2 = I_2$.

5p c) Să se arate că $(A, +, \cdot)$ nu este corp.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 41<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, $f(x) = \ln(1+x) - x$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict descrescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f este surjectivă.

5p c) Să se arate că graficul funcției f nu admite asimptote.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_1^x f(\ln t) dt = \frac{\pi}{2}$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right)$.