

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 40**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și numărul complex $z = \frac{a + 2i}{2 + ai}$. Să se determine a pentru care $z \in \mathbb{R}$.
- 5p** 2. Să se demonstreze că dreapta de ecuație $y = 2x + 3$ intersectează parabola de ecuație $y = x^2 - 4x + 12$ într-un singur punct.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x - 1} = x$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Să se determine probabilitatea ca, alegând o pereche (a, b) din produsul cartezian $A \times A$ să avem egalitatea $a + b = 6$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $M(2, -1)$, $A(1, 2)$ și $B(4, 1)$.
Să se determine lungimea vectorului $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin(a + b) \cdot \sin(a - b) = \sin^2 a - \sin^2 b$, pentru oricare $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, cu $a \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $S = A - XY$.

5p b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $BC = I_3$.

5p c) Să se arate că $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ și numărul $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, astfel încât $f(\varepsilon) = 0$.

5p a) Să se demonstreze că $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p b) Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$$

5p c) Să se arate că, dacă f divide $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2f_3(X^3)$, unde f_1, f_2, f_3 sunt polinoame cu coeficienți complecși, atunci fiecare dintre polinoamele f_1, f_2, f_3 este divizibil cu $X - 1$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 + 1}$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(-\infty, 0]$.

5p b) Să se arate că graficul funcției f are exact două puncte de inflexiune.

5p c) Să se determine ecuația asimptotei la graficul funcției f spre $-\infty$.

2. Se consideră funcțiile $F_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t \sin^n t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze $F_1(\pi)$.

5p b) Să se demonstreze că $F_{n+1}(1) < F_n(1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1)$.