

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 4**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\left(\frac{1}{1-i} - \frac{1}{1+i}\right)^2$ este real.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei $y = x^2 + 5x + 1$ este situat în cadranul III.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $9^x - 10 \cdot 3^{x-1} + 1 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă exact două cifre egale.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + (a+1)\vec{j}$ și $\vec{v} = -(5a-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ sunt perpendiculari.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea laturii BC a triunghiului ascuțitunghic ABC știind că $AB = 6$, $AC = 10$ și că aria triunghiului ABC este egală cu $15\sqrt{3}$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze rangul matricei A .

5p b) Să se demonstreze că $\det(A^t \cdot A) = 0$.

5p c) Să se determine o matrice nenulă $B \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{Q})$ astfel încât $AB = O_2$.

2. Se știe că $(G, \circ)$ este grup, unde $G = (3, \infty)$ și $x \circ y = (x - 3)(y - 3) + 3$. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow G$, $f(x) = x + 3$.

5p a) Să se calculeze $4 \circ 5 \circ 6$.

5p b) Să se demonstreze că funcția f este un izomorfism de grupuri, de la $((0, \infty), \cdot)$ la $(G, \circ)$.

5p c) Să se demonstreze că dacă H este un subgrup al lui G care conține toate numerele naturale $k \geq 4$, atunci H conține toate numerele raționale $q > 3$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$.

5p

a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p

b) Să se demonstreze că funcția f nu are puncte de extrem local.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(n))^{n^2}$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, I_n = \int_1^2 \frac{x^n}{x^n + 1} dx, n \in \mathbb{N}^*$.

5p

a) Să se calculeze I_1 .

5p

b) Să se arate că $I_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.