

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 39**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Se consideră numărul complex $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$. Să se demonstreze că $z^2 = \bar{z}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $-x^2 + 4x - 3 \geq 0$.
- 5p** 3. Să se arate că funcția $f : (1; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{1}{x}$ este injectivă.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi care are $AB = 2$, $AC = 3$ și $BC = 2\sqrt{2}$. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 39**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ bcx + acy + abz = 0 \end{cases}, \text{ cu } a, b, c \in \mathbb{R}^* \text{ și } A \text{ matricea sistemului.}$$

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se rezolve sistemul, în cazul în care a, b, c sunt distincte două câte două.

5p c) Să se determine mulțimea soluțiilor sistemului, în cazul în care $a = b \neq c$.

2. Se consideră mulțimea $M = \left\{ a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}, a^2 - 5b^2 = 1 \right\}$.

5p a) Să se arate că $x = 9 + 4\sqrt{5} \in M$.

5p b) Să se demonstreze că M este grup în raport cu înmulțirea numerelor reale.

5p c) Să se demonstreze că mulțimea M are o infinitate de elemente.

SUBIECTUL III (30p) Variantă 39<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$.

5p

a) Să se studieze monotonia funcției f .

5p

b) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p

c) Să se demonstreze că orice șir $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cu proprietatea $x_0 \in (0, 1)$, $x_{n+1} = e^{f(x_n)}$ este convergent.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+5} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

a) Să se calculeze I_2 .

5p

b) Să se arate că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ verifică relația $4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

c) Să se determine $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.