

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se calculeze suma $1 + 4 + 7 + \dots + 100$.
- 5p** 2. Să se determine imaginea funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + x + 1$.
- 5p** 3. Să se arate că numărul $\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}\right) + \sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ este natural.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea binomului $(\sqrt{2} + 1)^5$.
- 5p** 5. Fie $ABCD$ un pătrat de latură 1. Să se calculeze lungimea vectorului $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$.
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 105^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se arate că $\det(A) = (a-b)(a-1)$.

5p b) Să se calculeze $\det(A - A^t)$.

5p c) Să se arate că $\text{rang } A \geq 2$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + pX^2 + qX + r$, cu $p, q, r \in (0, \infty)$ și cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se demonstreze că f nu are rădăcini în intervalul $[0, \infty)$.

5p b) Să se calculeze $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ în funcție de p, q și r .

5p c) Să se demonstreze că dacă a, b, c sunt trei numere reale astfel încât $a + b + c < 0$, $ab + bc + ca > 0$ și $abc < 0$, atunci $a, b, c \in (-\infty, 0)$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 37<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 3\arctg x$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția f este bijectivă.

5p c) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^a}$ există, este finită și nenulă.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ dat de $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.