

**SUBIECTUL I (30p)****Varianta 36**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Se consideră numărul rațional  $\frac{1}{7}$  scris sub formă de fracție zecimală infinită  $\frac{1}{7} = 0, a_1 a_2 a_3 \dots$ .  
Să se determine  $a_{60}$ .
- 5p** 2. Fie funcțiile  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2 - x$ ,  $g(x) = 3x + 2$ . Să se calculeze  $(f \circ g)(x) - (g \circ f)(x)$ .
- 5p** 3. Să se demonstreze că funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 3x^3 + 1$  este injectivă.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să fie divizibil cu 50.
- 5p** 5. Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care punctele  $A(1, -2)$ ,  $B(4, 1)$  și  $C(-1, a)$  sunt coliniare.
- 5p** 6. Fie  $ABC$  un triunghi care are  $AB = 3$ ,  $AC = 5$  și  $BC = 7$ . Să se calculeze  $\cos A$ .

1. Se consideră matricele  $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  și  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , cu proprietatea că  $A^2 = O_2$ .

5p a) Să se arate că  $a + d = 0$ .

5p b) Să se arate că matricea  $I_2 + A$  este inversabilă.

5p c) Să se arate că ecuația  $AX = O_2$  are o infinitate de soluții în mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

2. Se consideră polinomul  $f = X^4 - 2X^2 + 9$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ , numărul  $a = \sqrt{2} + i$  și mulțimile  $A = \{g(a) \mid g \in \mathbb{Q}[X]\}$  și  $B = \{h(a) \mid h \in \mathbb{Q}[X], \text{grad}(h) \leq 3\}$ .

5p a) Să se calculeze  $f(a)$ .

5p b) Să se calculeze  $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4|$ .

5p c) Să se arate că  $A = B$ .

1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \setminus \{\sqrt{3}\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}$  și șirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  definit prin  $a_1 = 2$ ,  $a_{n+1} = f(a_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se demonstreze că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $(-\infty, \sqrt{3})$  și pe  $(\sqrt{3}, \infty)$ .

5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției  $f$ .

5p c) Să se demonstreze că șirul  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  nu este convergent.

2. Se consideră funcțiile  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^{-x^2}$  și  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ .

5p a) Să se determine punctele de inflexiune ale funcției  $F$ .

5p b) Să se calculeze  $\int_0^1 xf(x)dx$ .

5p c) Să se calculeze  $\int_0^1 F(x)dx$ .