

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 34**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = (3 + 4i)^4$.
- 5p** 2. Să se arate că vârful parabolei asociate funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 + 2x + 1$ se găsește pe dreapta de ecuație $x + y = 0$.
- 5p** 3. Să se determine numărul soluțiilor ecuației $\sin x = \sin 2x$ din intervalul $[0, 2\pi)$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Să se determine numărul funcțiilor bijective $f : A \rightarrow A$, cu proprietatea că $f(1) = 2$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care dreptele AB și CD sunt perpendiculare.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care are loc relația $\sin B + \cos B = \sin C + \cos C$. Să se demonstreze că triunghiul ABC este isoscel.

1. Se consideră matricele $K = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_{1,3}(\mathbb{R})$, $L = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $A = LK$.

5p a) Să se calculeze suma elementelor matricei A .

5p b) Să se arate că $A^2 = 32A$.

5p c) Să se arate că rangul matricei A^n este 1, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziție $x * y = axy - x - y + 6$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$, unde a este o constantă reală.

5p a) Pentru $a = \frac{1}{3}$, să se demonstreze că legea „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Să se arate că legea „ $*$ ” admite element neutru dacă și numai dacă $a = \frac{1}{3}$.

5p c) Să se arate că, dacă intervalul $[0, 6]$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea „ $*$ ”, atunci $a \in \left[\frac{1}{6}, \frac{1}{3} \right]$.

1. Se consideră funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ și șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$,

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se arate că $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

2. Se consideră funcțiile $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \arcsin t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze derivata funcției f_3 .

5p b) Să se calculeze $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p c) Să se determine $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x)$.