Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009
Probă scrisă la MATEMATICĂ - Proba D

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii.
Filiera tehnologică: profilul servicii, specializarea toate calificările profesionale; profilul resurse, specializarea toate calificările profesionale; profilul tehnic, specializarea toate calificările profesionale.

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 33**

http://www.pro-matematica.ro

5p **1.** Se consideră progresia aritmetică $(a_n)_{n\geq 1}$, în care $a_1 = 2$ și $a_2 = 4$. Să se calculeze suma primilor 10 termeni ai progresiei.

5p **2.** Să se determine funcția de gradul al doilea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (2m+1)x + 3$, $m\in\mathbb{R}$, al cărei grafic are abscisa vârfului egală cu $\frac{7}{2}$.

5p **3.** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{2x-1} = 3^{5-x}$.

5p **4.** Să se calculeze $A_5^2 - P_3$.

5p **5.** Să se determine numărul real *m* pentru care punctul $A(2,3)$ se află pe dreapta $d: 2x - y + m = 0$.

5p **6.** Să se calculeze aria triunghiului *MNP* știind că $MN = 4$, $NP = 6$ și $m(\sphericalangle MNP) = 45°$.

SUBIECTUL II (30p)

1. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}=\left\{\begin{pmatrix}1 & a & c\\ 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\middle| a,b,c\in\mathbb{Z}\right\}$.

5p **a)** Dacă $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ și $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, să se calculeze AB.

5p **b)** Să se demonstreze că pentru oricare $X,Y\in\mathcal{M}$, rezultă că $XY\in\mathcal{M}$.

5p **c)** Să se demonstreze că, dacă $U\in\mathcal{M}$ și $VU=UV$, pentru orice $V\in\mathcal{M}$, atunci există $p\in\mathbb{Z}$ astfel încât $U=\begin{pmatrix}1 & 0 & p\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2. Se consideră polinomul $f=\left(X^2-2X+1\right)^2-a^2$, unde $a\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Știind că $a=0$ să se determine soluțiile ecuației $f(x)=0$.

5p **b)** Să se verifice că $f=\left(X^2-2X+1+a\right)\left(X^2-2X+1-a\right)$.

5p **c)** Să se determine $a\in\mathbb{R}$ pentru care polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Să se verifice că $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Să se determine ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Să se arate că $-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e}$, oricare ar fi $x\ge 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră, $I_n=\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx$.

5p **a)** Să se calculeze I_1.

5p **b)** Să se arate că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

5p **c)** Utilizând, eventual, inegalitatea $\dfrac{x^n}{2}\le\dfrac{x^n}{x+1}\le x^n$, adevărată pentru orice $x\in[0,1]$ și $n\in\mathbb{N}^*$, să se demonstreze că $\dfrac{1}{2}\le 2010\cdot I_{2009}\le 1$.