

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 33**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $\log_4 16 + \log_3 9 + \sqrt[3]{27}$ este natural.
- 5p** 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^2 + 4x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $16^x + 3 \cdot 4^x = 4$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un element din mulțimea $\{\sqrt{n} \mid n \in \mathbb{N}, n < 100\}$, acesta să fie număr rațional.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$, $C(1, 3)$ și $D(a, 4)$, unde $a \in \mathbb{R}$. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ astfel încât dreptele AB și CD să fie paralele.
- 5p** 6. Știind că $x \in \mathbb{R}$ și că $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$, să se calculeze $\operatorname{tg} \left(x + \frac{\pi}{3} \right)$.

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ și $A = aI_3 + bB + cB^2$, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze B^3 .

5p b) Să se calculeze B^{-1} .

5p c) Să se demonstreze că $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b + c) \det(A) \geq 0$.

2. Se consideră corpul $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ și $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$.

5p a) Să se arate că $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p b) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$ există $x, y \in \mathbb{Z}_7$ astfel încât $a = x^2 + y^2$.

5p c) Să se arate că $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.

SUBIECTUL III (30p)**Varianta 33**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ și șirul $(a_n)_{n \geq 1}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că funcția f' este strict crescătoare pe intervalul $(0, +\infty)$.

5p b) Să se demonstreze că $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $f_1(x) = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}$, $\forall x \geq 0$.

5p b) Să arate că $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(1)$.