

- 5p** 1. Se consideră numărul real $s = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2009}}$. Să se demonstreze că $s \in (1; 2)$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$ și $g(x) = -4x + 1$. Să se determine coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sin x = 1 + \cos^2 x$.
- 5p** 4. Fie mulțimea $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. Să se determine numărul funcțiilor pare $f : A \rightarrow A$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3)$.
Să se determine coordonatele punctului D știind că patrulaterul $ABCD$ este paralelogram.
- 5p** 6. Știind că $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ și că $\sin x = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\sin \frac{x}{2}$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 32**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră în $\mathbb{R}^3$ sistemul
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ x + y + az = a \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se arate că determinantul matricei sistemului are valoarea $(a+2)(a-1)^2$.

5p b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p c) Să se rezolve sistemul în cazul $a = -2$.

2. Se consideră mulțimea $G \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{Q})$, $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 10b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Q}, a^2 - 10b^2 = 1 \right\}$.

5p a) Să se verifice că $A = \begin{pmatrix} 19 & 60 \\ 6 & 19 \end{pmatrix} \in G$.

5p b) Să se arate că $X \cdot Y \in G$, pentru oricare $X, Y \in G$.

5p c) Să se demonstreze că mulțimea G este infinită.

SUBIECTUL III (30p)**Varianta 32**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se demonstreze că $0 < f(x) \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se demonstreze că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ este constantă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ și $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$.

5p a) Să se calculeze $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$.

5p b) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$.

5p c) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficele celor două funcții și dreptele $x=0$ și $x=1$.