

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 31**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Știind că $\log_3 2 = a$, să se arate că $\log_{16} 24 = \frac{1+3a}{4a}$.
- 5p** 2. Să se determine două numere reale care au suma 1 și produsul -1 .
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x+1} + 2^{x+2} = 160$.
- 5p** 4. Într-o clasă sunt 22 de elevi, dintre care 12 sunt fete. Să se determine în câte moduri se poate alege un comitet reprezentativ al clasei format din 3 fete și 2 băieți.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A(2, -1)$, $B(-1, 1)$ și $C(1, 3)$.
Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul C și este paralelă cu dreapta AB .
- 5p** 6. Să se arate că $\sin 6 < 0$.

1. Pentru $x \in \mathbb{C}$ se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

5p a) Să se verifice că $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p b) Să se determine toate numerele complexe x pentru care $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p c) Să se arate că ecuația $X^2 = A(0)$, $X \in M_2(\mathbb{C})$ nu are soluții.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$, care are forma algebrică

$$f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + \dots + a_1X + a_0.$$

5p a) Să se calculeze $a_{100} + a_{99}$.

5p b) Să se determine restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 1$.

5p c) Să se demonstreze că polinomul f are toate rădăcinile reale.

SUBIECTUL III (30p) Variantă 31

<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$.

5p a) Să se arate că graficul funcției f admite asimptotă spre $-\infty$.

5p b) Să se determine domeniul de derivabilitate al funcției f .

5p c) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se verifice că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.