

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 30**<http://www.pro-matematica.ro>**5p**

1. Să se demonstreze că numărul $\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$ este natural.

5p

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - mx + 2$. Să se determine mulțimea valorilor parametrului real m pentru care graficul funcției f intersectează axa Ox în două puncte distincte.

5p

3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+1) + \log_3(x+3) = 1$.

5p

4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, aceasta să aibă produsul elementelor 120.

5p

5. Se consideră punctele $A(0, 2)$, $B(1, -1)$ și $C(3, 4)$. Să se calculeze coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC .

5p

6. Să se demonstreze că $\sin \frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$.

1. Se consideră numerele reale a, b, c , funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ și determinanții

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \text{ și } B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix}.$$

5p a) Să se arate că $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p b) Să se arate că $A = B$.

5p c) Să se arate că, pentru orice trei puncte distincte, cu coordonate naturale, situate pe graficul funcției f , aria triunghiului cu vârfurile în aceste puncte este un număr natural divizibil cu 3.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \}$.

5p a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R}, X(a)X(0) = X(a)$ și $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$.

5p b) Să se arate că mulțimea $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$ este parte stabilă a lui $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ în raport cu înmulțirea matricelor.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2, X \in G$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$.

5p a) Să se determine $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

5p b) Să se calculeze derivata a doua a funcției f .

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$.

2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$.

5p a) Să se arate că funcția $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, definit de $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este convergent.