

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se ordoneze crescător numerele $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[4]{5}$.
- 5p 2. Să se determine valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x-1) + \lg(6x-5) = 2$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul $A(6, 4)$ și este perpendiculară pe dreapta $d : 2x - 3y + 1 = 0$.
- 5p 6. Știind că $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2\alpha$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se verifice egalitatea $A^2 - A = 2I_3$.

5p b) Să se calculeze A^{-1} .

5p c) Să se arate că $A^{2009} + A^{2008} = 2^{2008}(A + I_3)$.

2. Se consideră cunoscut că $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ este un inel comutativ, unde $x * y = x + y - 3$ și $x \circ y = x \cdot y - 3x - 3y + 12$, $\forall x, y \in \mathbb{Z}$.

5p a) Să se arate că elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ” este 4.

5p b) Să se determine $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât între inelele $(\mathbb{Z}, *, \circ)$ și $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ să existe un izomorfism de forma $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, $f(x) = a \cdot x + b$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea $\mathbb{Z}$ ecuația $\underbrace{x \circ x \circ \dots \circ x}_{\text{de 2009 ori } x} = 2^{2009} + 3$.

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 18x^2 - \ln x$.

5p

a) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției f .

5p

b) Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $f(x) \geq a$, $\forall x \in (0, \infty)$.

5p

c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_a(x) = \frac{1}{|x-a|+3}$, unde $a \in \mathbb{R}$.

5p

a) Să se arate că, pentru orice $a \in \mathbb{R}$, funcția f_a are primitive strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p

b) Să se calculeze $\int_0^3 f_2(x) dx$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^3 f_a(x) dx$.