

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 29**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se demonstreze că numărul $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ este număr natural.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$. Să se rezolve inecuația $f(2x) \leq 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = \sqrt{2 - x}$.
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor nevide ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, aceasta să aibă toate elementele impare.
- 5p** 5. Fie punctele $A(2, 0)$, $B(1, 1)$ și $C(3, -2)$. Să se calculeze $\sin \widehat{ACB}$.
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și că $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 2$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 29**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1, \quad m \in \mathbb{R} \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$$
 și matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care $\det(A) = 0$.

5p b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p c) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ știind că sistemul are o soluție (x_0, y_0, z_0) cu $z_0 = 2$.

2. Se consideră mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$, submulțimea $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ și matricele

$$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix} \text{ și } I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se verifice că dacă $x, y \in \mathbb{Z}_3$, atunci $x^2 + y^2 = \hat{0}$ dacă și numai dacă $x = y = \hat{0}$.

5p b) Să se arate că mulțimea $H = G \setminus \{O_2\}$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile din $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^2 = I_2$, $X \in G$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 29<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră $n \in \mathbb{N}^*$ și funcțiile $f_n, g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}$, $g_n(x) = x^{2n+1} + 1$.

5p a) Să se verifice că $f'_n(x) = \frac{g'_n(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n\left(\frac{1}{2}\right)$.

5p c) Să se demonstreze că f_n are exact un punct de extrem local.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ definit prin $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_2 .

5p b) Să se demonstreze că șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.