

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 28**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $(1+i)^{10} + (1-i)^{10}$.
- 5p** 2. Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 6x - 3x^2$. Să se ordoneze crescător numerele $f(\sqrt{2})$, $f(\sqrt{3})$ și $f(2)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{2x-1} = 3$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0,1,2,3\} \rightarrow \{0,1,2,3\}$ care au proprietatea că $f(0)$ este număr impar.
- 5p** 5. Fie triunghiul ABC și $M \in (BC)$ astfel încât $\frac{BM}{BC} = \frac{1}{3}$. Să se demonstreze că $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și că $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, să se calculeze $\operatorname{tg} \alpha$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se rezolve ecuația $\det(A - xI_2) = 0$.

5p b) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $a, b \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

5p c) Să se determine numărul de soluții ale ecuației $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Se consideră mulțimea de funcții $G = \left\{ f_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f_{a,b}(x) = ax + b, a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}$.

5p a) Să se calculeze $f_{-1,2} \circ f_{-1,2}$, unde „ $\circ$ ” este compunerea funcțiilor.

5p b) Să se demonstreze că $(G, \circ)$ este un grup.

5p c) Să se arate că grupul G conține o infinitate de elemente de ordin 2.

1. Fie funcția $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$, unde $\{x\}$ este partea fracționară a numărului x .

5p a) Să se calculeze $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$.

5p b) Să se determine domeniul de continuitate al funcției f .

5p c) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$ și $F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$.

5p b) Să se demonstreze că funcția F este strict crescătoare.

5p c) Să se determine $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$.