

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 27**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^6$.
- 5p** 2. Să se determine valoarea maximă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -2x^2 + x$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $(0; \infty)$ ecuația $\lg^2 x + 5\lg x - 6 = 0$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f : \{0, 1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ care au proprietatea $f(0) = f(1) = 2$.
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $O(0, 0)$, $A(1, 2)$ și $B(3, 1)$. Să se determine măsura unghiului AOB .
- 5p** 6. Știind că $\alpha \in \mathbb{R}$ și că $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\sin 2\alpha$.

1. În mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se determine rangul matricei $A + I_2$.

5p b) Să se demonstreze că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ astfel încât $AX = XA$, atunci există $x, y \in \mathbb{C}$ astfel încât $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p c) Să se demonstreze că ecuația $Y^2 = A$ nu are nicio soluție în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = x + y + xy$.

5p a) Să se arate că legea „ $*$ ” este asociativă.

5p b) Fie funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Să se verifice relația $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

5p c) Să se calculeze $1 * \frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{2008} * \frac{1}{2009}$.

1. Fie funcția $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\arcsin x$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x}$.

5p b) Să se determine punctele în care funcția f nu este derivabilă.

5p c) Să se arate că funcția f este convexă.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

5p a) Să se arate că funcția F este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția F este bijectivă.

5p c) Să se calculeze $\int_0^a F^{-1}(x) dx$, unde F^{-1} este inversa funcției F și $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.