

**SUBIECTUL I (30p)****Variantă 26**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Fie  $z_1$  și  $z_2$  soluțiile complexe ale ecuației  $2z^2 + z + 50 = 0$ . Să se calculeze  $|z_1| + |z_2|$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = 1 - 2x$ . Să se arate că funcția  $f \circ f \circ f$  este strict descrescătoare.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x + 9^x = 2$ .
- 5p** 4. Fie mulțimea  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  și o funcție bijectivă  $f : A \rightarrow A$ . Să se calculeze  $f(-2) + f(-1) + f(0) + f(1) + f(2)$ .
- 5p** 5. În sistemul cartezian de coordonate  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, 3)$  și  $B(1, -1)$ . Să se determine ecuația mediatoarei segmentului  $AB$ .
- 5p** 6. Fie  $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  cu  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ . Să se calculeze  $\operatorname{tg} \alpha$ .

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ , cu  $t \in \mathbb{R}$ .

5p a) Să se arate că dacă matricea  $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  verifică relația  $AX = XA$ , atunci există  $a, b \in \mathbb{R}$ , astfel încât  $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ .

5p b) Să se demonstreze că  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$ .

5p c) Să se rezolve în mulțimea  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  ecuația  $X^2 = A$ .

2. Se consideră  $a \in \mathbb{R}$  și polinomul  $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$ .

5p a) Să se calculeze  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ , unde  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .

5p b) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la  $(X - 1)^2$ .

5p c) Să se demonstreze că  $f$  nu are toate rădăcinile reale.

1. Fie funcția  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$ .

5p a) Să se determine asimptota la graficul funcției  $f$  spre  $+\infty$ .

5p b) Să se arate că funcția  $f$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ .

5p c) Să se arate că șirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ , dat de  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  și  $x_1 = 0$ , este convergent.

2. Fie funcția  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin x$ .

5p a) Să se arate că funcția  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = xf(x)$  are primitive, iar acestea sunt crescătoare.

5p b) Să se calculeze  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$ .

5p c) Să se arate că  $\int_0^1 x f(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .