

SUBIECTUL I (30p)

- 5p 1. Să se calculeze $(1-i)(1+2i)-3(2-i)$.
- 5p 2. Să se arate că pentru oricare $a \in \mathbb{R}^*$, dreapta $y = x + 4$ intersectează parabola $y = ax^2 + (a-2)x + 1$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{2x} - 3 \cdot 2^{x+1} + 8 = 0$.
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $\{10, 11, 12, \dots, 40\}$, suma cifrelor lui să fie divizibilă cu 3.
- 5p 5. În triunghiul ABC punctele M, N, P sunt mijloacele laturilor. Fie H ortocentrul triunghiului MNP . Să se demonstreze că $AH = BH = CH$.
- 5p 6. Să se calculeze $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}\right)$.

1. În mulțimea S_3 a permutărilor de 3 elemente se consideră permutarea $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se verifice că permutarea σ este pară.

5p b) Să se determine toate permutările $x \in S_3$, astfel încât $x\sigma = \sigma x$.

5p c) Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$, cu $x \in S_3$.

2. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ și mulțimea $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \}$.

5p a) Să se arate că $\forall a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $X(a)X(b) = X(ab + a + b)$.

5p b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este un grup abelian, unde „ $\cdot$ ” reprezintă înmulțirea matricelor.

5p c) Să se determine $t \in \mathbb{R}$ astfel încât $X(1)X(2)\dots X(2009) = X(t-1)$.

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$.

5p a) Să se arate că funcția este convexă pe intervalul $(0, e]$.

5p b) Să se determine asimptotele graficului funcției.

5p c) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 3}$, dat de $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n} - f(n)$, este descrescător.

2. Se consideră funcția $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$.

5p a) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f și axele de coordonate.

5p b) Să se calculeze volumul corpului obținut prin rotirea graficului funcției f în jurul axei Ox .

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$.