

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 24**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $z + \frac{1}{z}$ pentru $z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția de gradul al doilea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care $f(-1) = f(1) = 0$, $f(2) = 6$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2 x + \log_4 x + \log_8 x = \frac{11}{6}$.
- 5p** 4. Să se demonstreze că dacă $x \in \mathbb{R}$ și $|x| \geq 1$, atunci $(1+x)^2 + (1-x)^2 \geq 4$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația înălțimii duse din B în triunghiul ABC , știind că $A(0, 9)$, $B(2, -1)$ și $C(5, -3)$.
- 5p** 6. Să se calculeze $(2\vec{i} + 5\vec{j}) \cdot (3\vec{i} - 4\vec{j})$.

1. Se consideră o matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$. Se notează cu A^t transpusa matricei A .

5p a) Să se demonstreze că $\forall z \in \mathbb{C}, \forall X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), \det(zX) = z^3 \det(X)$.

5p b) Să se demonstreze că $\det(A - A^t) = 0$.

5p c) Știind că $A \neq A^t$, să se demonstreze că $\text{rang}(A - A^t) = 2$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, cu $f = X^4 - 5X^2 + 4$.

5p a) Să se determine rădăcinile polinomului f .

5p b) Să se determine polinomul $h \in \mathbb{Q}[X]$, pentru care $h(0) = 1$ și ale cărei rădăcini sunt inversele rădăcinilor polinomului f .

5p c) Știind că g este un polinom cu coeficienți întregi, astfel încât $g(-2) = g(-1) = g(1) = g(2) = 2$, să se arate că ecuația $g(x) = 0$ nu are soluții întregi.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sin x$.

5p a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p b) Să se arate că graficul funcției nu are asimptote.

5p c) Să se arate că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \sqrt[3]{f(x)}$ este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x}, & x > 0. \\ 1, & x = 0 \end{cases}$

5p a) Să se arate că funcția f are primitive pe $[0, \infty)$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 xf(x) dx$.

5p c) Folosind eventual inegalitatea $e^x \geq x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, să se arate că $0 \leq \int_0^x f(t) dt < 1$, $\forall x > 0$.