

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 22**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $1 + i + i^2 + \dots + i^{10}$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$, $g(x) = 2x - 1$. Să se rezolve ecuația $(f \circ g)(x) = 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x + 9) + \lg(7x + 3) = 1 + \lg(x^2 + 9)$.
- 5p** 4. Să se rezolve inecuația $C_n^2 < 10$, $n \geq 2$, n natural.
- 5p** 5. Se consideră dreptele paralele de ecuații $d_1 : x - 2y = 0$ și $d_2 : 2x - 4y - 1 = 0$. Să se calculeze distanța dintre cele două drepte.
- 5p** 6. Să se calculeze $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$.

1. Fie sistemul
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + by + cz = 0 \\ a^3x + b^3y + c^3z = 1 \end{cases}$$
, cu $a, b, c \in \mathbb{R}$, distincte două câte două și A matricea sistemului.

5p a) Să se arate că $\det(A) = (a + b + c)(c - b)(c - a)(b - a)$.

5p b) Să se rezolve sistemul în cazul $a + b + c \neq 0$.

5p c) Să se demonstreze că dacă $a + b + c = 0$, atunci sistemul este incompatibil.

2. Se consideră șirul de numere reale $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cu $a_0 = 0$ și $a_{n+1} = a_n^2 + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$ și polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, cu $f(0) = 0$ și cu proprietatea că $f(x^2 + 1) = (f(x))^2 + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se calculeze $f(5)$.

5p b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) = a_n$.

5p c) Să se arate că $f = X$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{x^4 + 3}$.

5p a) Să se calculeze $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se determine mulțimea valorilor funcției f .

5p c) Să se arate că $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

5p a) Să se calculeze $\int_2^3 \frac{f(x)}{x-1} dx$.

5p b) Să se calculeze $\int_{-1}^0 \frac{x^2 - 13}{f(x)} dx$.

5p c) Să se determine punctele de extrem ale funcției $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_0^{x^2} f(t)e^t dt$.