

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 21**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 8x + 25 = 0$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$, pentru care graficul funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (a+1)x^2 + 3(a-1)x + a-1$, intersectează axa Ox în două puncte distincte.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_8^4 - C_7^4 - C_7^3$.
- 5p** 5. Să se determine ecuația perpendicularei duse din punctul $A(1,2)$ pe dreapta $d : x + y - 1 = 0$.
- 5p** 6. Știind că $\sin x = \frac{1}{3}$, să se calculeze $\cos 2x$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 21**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Pentru $a, b, c \in \mathbb{R}^*$, se consideră sistemul
$$\begin{cases} ax + by + cz = b \\ cx + ay + bz = a \\ bx + cy + az = c \end{cases}, \quad x, y, z \in \mathbb{R}.$$

5p a) Să se arate că determinantul sistemului este $\Delta = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.

5p b) Să se rezolve sistemul în cazul în care este compatibil determinat.

5p c) Știind că $a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0$, să se arate că sistemul are o infinitate de soluții (x, y, z) , astfel încât $x^2 + y^2 = z - 1$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{Z}_4 \right\}$.

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .

5p b) Să se dea un exemplu de matrice $A \in G$ cu proprietatea că $\det A \neq \hat{0}$ și $\det A^2 = \hat{0}$.

5p c) Să se determine numărul soluțiilor ecuației $X^2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)(x-3)(x-5)(x-7)$.

5p a) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^4}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)^{\frac{1}{x}}$.

5p c) Să se arate că ecuația $f'(x) = 0$ are exact trei rădăcini reale.

2. Se consideră funcțiile $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze aria suprafeței cuprinse între graficul funcției f_1 , axele de coordonate și dreapta $x=1$.

5p b) Să se calculeze $\int_0^1 x (f_1(x))^2 dx$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} n(f_n(1) + f_n(2) + f_n(3) + \dots + f_n(n)) = \frac{\pi}{4}$.