

SUBIECTUL I (30p) **Variantă 20**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că $2 \in (\log_3 4, \sqrt{5})$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 2 = 0$.
- 5p** 3. Să se rezolve în $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = -1$.
- 5p** 4. Să se calculeze $C_4^4 + C_5^4 + C_6^4$.
- 5p** 5. Pe laturile AB și AC ale triunghiului ABC se consideră punctele M , respectiv N astfel încât $\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{MB}$ și $MN \parallel BC$. Să se determine $m \in \mathbb{R}$ astfel încât $\overrightarrow{CN} = m\overrightarrow{AC}$.
- 5p** 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului OAB , știind că $O(0,0)$, $A(-1,2)$ și $B(-2,3)$.

1. Se consideră triunghiul ABC , cu laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$ și sistemul
$$\begin{cases} ay + bx = c \\ cx + az = b \\ bz + cy = a \end{cases}.$$

5p a) Să se rezolve sistemul în cazul $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$.

5p b) Să se demonstreze că, pentru orice triunghi, sistemul are soluție unică.

5p c) Știind că soluția sistemului este (x_0, y_0, z_0) , să se demonstreze că $x_0, y_0, z_0 \in (-1, 1)$.

2. Se consideră mulțimea $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_3 \right\}.$

5p a) Să se determine numărul elementelor mulțimii G .

5p b) Să se arate că $AB \in G$, pentru orice $A, B \in G$.

5p c) Să se determine numărul matricelor din mulțimea G care au determinantul nul.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x + 3x^2 - 2x + 5$.

5p a) Să se demonstreze că funcția f este strict crescătoare pe $[0, \infty)$.

5p b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{f(x)}$.

2. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(t) = \frac{1}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 (t^3 + 1) f(t) dt$.

5p b) Să se arate că $\int_{\frac{1}{x}}^1 f(t) dt = \int_1^x t^3 f(t) dt$, $\forall x > 0$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{x}}^x f(t) dt$.