

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 2**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că numărul $(1-i)^{24}$ este real.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{3x-1}{x+1} + \frac{x+1}{2x-1} = 3$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f: \mathbb{R} \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = e^x + 1$.
- 5p** 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr $\overline{ab}$ din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem $a \neq b$.
- 5p** 5. Să se calculeze lungimea medianei din A a triunghiului ABC , unde $A(-2, -1)$, $B(2, 0)$, $C(0, 6)$.
- 5p** 6. Fie vectorii $\vec{u} = m\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = (m-2)\vec{i} - \vec{j}$. Să se determine $m > 0$ astfel încât vectorii $\vec{u}$ și $\vec{v}$ să fie perpendiculari.

1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se arate că există $a \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = aA$.

5p b) Să se calculeze $(A - A^t)^{2009}$.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^5 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Pentru a, b din mulțimea $M = [0, \infty)$ se definește operația $a * b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

5p a) Să se arate că dacă $a, b \in M$, atunci $a * b \in M$.

5p b) Să se arate că legea de compoziție „ $*$ ” este asociativă.

5p c) Pentru $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, să se determine $a \in M$ astfel încât $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = 2a$.

SUBIECTUL III (30p) Varianta 2<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ dat de $a_1 \in (0,1)$ și $a_{n+1} = a_n(1 - \sqrt{a_n})$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $a_n \in (0,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p b) Să se demonstreze că șirul $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ este strict descrescător.

5p c) Să se arate că șirul $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, dat de $b_n = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, este mărginit superior de a_1 .

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}$.

5p a) Să se arate că funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \arctg\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$, $x \in \mathbb{R}$, este o primitivă a funcției f .

5p b) Să se calculeze aria suprafeței delimitate de dreptele $x=0$, $x=1$, Ox și graficul funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-n}^n f(x) dx$, unde $n \in \mathbb{N}^*$.