

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 18**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se rezolve în mulțimea numerelor complexe ecuația $x^2 - 2x + 4 = 0$.
- 5p** 2. Să se afle valoarea minimă a funcției $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $[-1, 1]$ ecuația $\arcsin x + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$.
- 5p** 4. Care este probabilitatea ca, alegând un număr k din mulțimea $\{0, 1, 2, \dots, 7\}$, numărul C_7^k să fie prim.
- 5p** 5. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care vectorii $\vec{u} = a\vec{i} + 3\vec{j}$ și $\vec{v} = 4\vec{i} + (a + 4)\vec{j}$ sunt coliniari.
- 5p** 6. Să se calculeze $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC})$, știind că $A(-3, 4)$, $B(4, -3)$ și $C(1, 2)$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

5p a) Să se calculeze A^3 .

5p b) Să se afle rangul matricei $I_3 + A + A^t$.

5p c) Să se determine inversa matricei $I_3 + A$.

2. Se consideră $a, b \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + 4aX^2 + 20X + b$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se determine x_1, x_2, x_3 în cazul $a = 2, b = 0$.

5p b) Să se demonstreze că $(x_1 - x_2)^2 + (x_1 - x_3)^2 + (x_2 - x_3)^2 = 8(4a^2 - 15)$.

5p c) Să se determine a, b astfel încât polinomul f să aibă o rădăcină dublă egală cu $-a$.

1. Se consideră funcția $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, $f(x) = \frac{2x+1}{x+2}$ și șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $x_0 = 2$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

5p

a) Să se determine asimptotele graficului funcției f .

5p

b) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, are limita 1.

5p

c) Să se arate că șirul $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dat de $y_n = x_0 + x_1 + x_2 + \dots + x_n - n$, este convergent.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + \cos x$ și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = x \int_0^x f(t) dt$.

5p

a) Să se calculeze $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$.

5p

b) Să se arate că F este funcție pară.

5p

c) Să se determine intervalele de monotonie ale funcției F .