

**SUBIECTUL I (30p)****Varianta 17**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p 1. Să se arate că numărul  $(1 + i\sqrt{3})^3$  este întreg.
- 5p 2. Să se determine imaginea funcției  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 - x + 2$ .
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{-2x+1} = 5$ .
- 5p 4. Să se determine probabilitatea ca, alegând un număr  $\overline{ab}$  din mulțimea numerelor naturale de două cifre, să avem  $a + b = 4$ .
- 5p 5. Să se determine ecuația dreptei care trece prin punctul  $A(-1,1)$  și este perpendiculară pe dreapta  $d : 5x - 4y + 1 = 0$ .
- 5p 6. Să se calculeze perimetrul triunghiului  $ABC$  știind că  $AB = 6$ ,  $B = \frac{\pi}{4}$  și  $C = \frac{\pi}{6}$ .

1. Se consideră matricele  $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  și  $B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ .

5p a) Să se calculeze  $A^2 - B^2$ .

5p b) Să se calculeze  $\det(I_2 + A + A^2 + A^3 + A^4)$ .

5p c) Să se arate că ecuația  $X^2 = I_2$  are o infinitate de soluții în  $M_2(\mathbb{Z})$ .

2. Se consideră polinoamele  $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ ,  $f = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ , cu rădăcinile  $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$  și  $g = X^2 - 1$ .

5p a) Să se determine restul împărțirii polinomului  $f$  la polinomul  $g$ .

5p b) Să se calculeze  $(1 - x_1) \cdot (1 - x_2) \cdot (1 - x_3) \cdot (1 - x_4)$ .

5p c) Să se calculeze  $g(x_1) \cdot g(x_2) \cdot g(x_3) \cdot g(x_4)$ .

1. Se consideră şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ , unde  $x_1 \in (0,1)$  şi  $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Să se arate că  $x_n \in (0,1)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p b) Să se arate că şirul  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  este convergent.

5p c) Să se arate că  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$ .

2. Se consideră o funcţie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea că  $xf(x) = \sin x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

5p a) Să se calculeze  $\int_0^\pi x^2 f(x) dx$ .

5p b) Să se arate că funcţia  $f$  este integrabilă pe intervalul  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

5p c) Să se arate că  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \cos 1$ .