

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 16**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze modulul numărului complex $z = \frac{2-i}{2+i}$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x^2 + ax + 2 \geq 0$, oricare ar fi numărul real x .
- 5p** 3. Să se rezolve în intervalul $[-1,1]$ ecuația $\arcsin \frac{1}{2} + \arcsin x = \frac{\pi}{3}$.
- 5p** 4. Să se rezolve ecuația $C_n^8 = C_n^{10}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 10$.
- 5p** 5. Să se afle măsura celui mai mare unghi al triunghiului ABC știind că $A(2,-2)$, $B(2,3)$, $C(-2,3)$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ astfel încât $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Să se calculeze $\sin 2\alpha$.

1. Se consideră mulțimea $G = \left\{ X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$

5p a) Să se arate că dacă $A, B \in G$, atunci $AB \in G$.

5p b) Să se găsească două matrice $C, D \in G$ pentru care $CD \neq DC$.

5p c) Să se arate că dacă $A \in G$, atunci $I_2 - A + A^2 \in G$.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{Q}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$.

5p a) Să se determine a, b, c astfel încât polinomul f să aibă rădăcinile $x_1 = x_2 = 1$ și $x_3 = -2$.

5p b) Să se arate că dacă f are rădăcina $\sqrt{2}$, atunci f are o rădăcină rațională.

5p c) Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, iar numerele $f(0)$ și $f(1)$ sunt impare, atunci polinomul f nu are rădăcini întregi.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$.

5p a) Să se arate că funcția f este derivabilă pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$.

5p c) Să se demonstreze că funcția f este mărginită pe $\mathbb{R}$.

2. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = (1-x)^n$.

5p a) Să se calculeze $\int_0^1 f_2(x) dx$.

5p b) Să se arate că $\int_0^1 x f_n(x) dx = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n\left(\frac{x}{n}\right) dx$.