

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 15**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $\log_3(5 - \sqrt{7}) + \log_3(5 + \sqrt{7}) - \log_3 2$.
- 5p** 2. Să se determine funcția de gradul al doilea al cărei grafic este tangent la axa Ox în punctul $(1, 0)$ și trece prin punctul $(0, 2)$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\sin x + \cos x = 0$.
- 5p** 4. Câte numere naturale de patru cifre se pot forma cu elemente ale mulțimii $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei care conține punctul $A(-2, 2)$ și este paralelă cu dreapta determinată de punctele $C(2, 1), D(-1, -3)$.
- 5p** 6. Fie $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$. Să se calculeze $\sin \alpha$.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 15**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Fie $a, b, c \in \mathbb{Z}$ și matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$ și A nu este inversabilă în $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$, atunci $a = b = c$.

5p c) Să se arate că sistemul de ecuații liniare
$$\begin{cases} ax + by + cz = \frac{1}{2}x \\ cx + ay + bz = \frac{1}{2}y \\ bx + cy + az = \frac{1}{2}z \end{cases}$$
 admite numai soluția $x = y = z = 0$.

2. Se consideră polinomul $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p a) Să se calculeze $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$.

5p b) Să se arate că polinomul f are toate rădăcinile reale.

5p c) Să se arate că dacă g este un polinom cu coeficienți reali care are proprietatea că pentru orice x real $|g(x)| \leq |f(x)|$, atunci există $a \in [-1, 1]$ astfel încât $g = af$.

1. Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, se consideră funcția $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

5p a) Să se arate că f_n este strict descrescătoare pe $[0;1]$ și strict crescătoare pe $[1;\infty)$.

5p b) Să se arate că ecuația $f_n(x) = 0$, $x > 0$ are exact două rădăcini $a_n \in (0,1)$ și $b_n \in (1,\infty)$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, unde a_n s-a definit la punctul b).

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unde $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx$ și $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx$, $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se arate că $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p b) Să se arate că $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

5p c) Să se arate că $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$.