

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 14**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se calculeze $\lg \frac{1}{2} + \lg \frac{2}{3} + \lg \frac{3}{4} + \dots + \lg \frac{99}{100}$.
- 5p** 2. Să se determine $a \in \mathbb{R}^*$ pentru care $(a-3)x^2 - ax - a < 0$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[3]{8-x} = \sqrt[3]{9-4x}$.
- 5p** 4. Să se determine numărul elementelor unei mulțimi știind că aceasta are exact 45 de submulțimi cu două elemente.
- 5p** 5. Să se determine ecuația dreptei AB știind că $A(2,3)$ și $B(-5,4)$.
- 5p** 6. Triunghiul ABC ascuțitunghic are $AC = 2\sqrt{3}$ și lungimea razei cercului circumscris egală cu 2. Să se determine măsura unghiului B .

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3a & 3b & 3c \end{pmatrix}$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}^*$.

5p a) Să se calculeze rangul matricei A .

5p b) Să se arate că există $d \in \mathbb{R}$ astfel încât $A^2 = dA$.

5p c) Să se arate că există matricele $K \in M_{3,1}(\mathbb{R})$ și $L \in M_{1,3}(\mathbb{R})$ astfel încât $A = K \cdot L$.

2. Se consideră numărul $a = \sqrt{3} - i \in \mathbb{C}$ și polinomul $f \in \mathbb{Q}[X]$, $f = X^4 - 4X^2 + 16$.

5p a) Să se arate că $f(a) = 0$.

5p b) Să se determine rădăcinile polinomului f .

5p c) Să se arate că polinomul f este ireductibil în $\mathbb{Q}[X]$.

1. Pentru $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ se consideră funcția $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x$ și se notează cu x_n abscisa punctului de inflexiune din intervalul $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, al graficului funcției f_n .

5p a) Să se arate că $f_n''(x) = n(n-1)\sin^{n-2}x - n^2\sin^n x, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$ și $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, n \geq 3$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{R}$ și funcțiile $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, F(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

5p a) Să se arate că funcția F este o primitivă a funcției f .

5p b) Pentru $a = 2$, să se determine aria suprafeței plane cuprinsă între graficul funcției f , axa Ox și dreptele $x = 1$ și $x = 2$.

5p c) Să se determine a astfel încât $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$.