

SUBIECTUL I (30p) **Variantă 13**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p 1. Să se arate că numărul $(1 + i\sqrt{3})^2 + (1 - i\sqrt{3})^2$ este număr întreg.
- 5p 2. Să se rezolve în $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sistemul de ecuații $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 3 \end{cases}$.
- 5p 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x = 6(\sqrt{x-2} - 1)$.
- 5p 4. Să se determine termenul care nu conține pe x din dezvoltarea $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^9$.
- 5p 5. Să se calculeze distanța de la punctul $A(3, 0)$ la dreapta $d : 3x - 4y + 1 = 0$.
- 5p 6. Triunghiul ABC are $AB = 4$, $BC = 5$ și $CA = 6$. Să se arate că $m(\sphericalangle B) = 2m(\sphericalangle C)$.

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ mx + y + z = 3m \end{cases}, \text{ unde } m \in \mathbb{R}. \text{ Pentru fiecare } m \in \mathbb{R}, \text{ notăm cu } S_m$$

mulțimea soluțiilor reale ale sistemului.

5p a) Să se determine $m \in \mathbb{R}$ pentru care sistemul are soluție unică.

5p b) Să se arate că pentru orice $m \in \mathbb{R}$ sistemul este compatibil.

5p c) Să se determine $\min\{x^2 + y^2 + z^2 \mid (x, y, z) \in S_1\}$.

2. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = A \cdot B$ și mulțimea

$$G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid \det(X) = 1 \right\}.$$

5p a) Să se verifice că $A^4 = B^6 = I_2$.

5p b) Să se arate că $(G, \cdot)$ este un subgrup al grupului multiplicativ al matricelor inversabile de ordin doi, cu elemente numere complexe.

5p c) Să se demonstreze că $C^n \neq I_2$, pentru orice $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x^2 - 4}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p a) Să se determine asimptota oblică a graficului funcției f spre ∞ .

5p b) Să se arate că $f^2(x) f'(x) = x^2 + 2x$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{-2, 1\}$.

5p c) Să se determine derivatele laterale ale funcției f în punctul $x_0 = -2$.

2. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ se consideră funcția $F_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$, $x > 0$.

5p a) Să se calculeze $F_1(x)$, $x > 0$.

5p b) Să se determine punctele de inflexiune ale graficului funcției F_n .

5p c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} F_2(x)$.