

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 12**<http://www.pro-matematica.ro>

5p 1. Să se calculeze $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$.

5p 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x+1}{x+2} + \frac{x+2}{x+3} = \frac{7}{6}$.

5p 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\cos 2x = \frac{1}{2}$.

5p 4. Să se determine $a > 0$ știind că termenul din mijloc al dezvoltării $\left(\sqrt[3]{a} + \frac{1}{\sqrt[4]{a}} \right)^{12}$ este egal cu 1848.

5p 5. Să se determine ecuația simetricei dreptei $d : 2x - 3y + 1 = 0$ față de punctul $A(-3, 4)$.

5p 6. Știind că $\operatorname{ctg} x = 3$, să se calculeze $\operatorname{ctg} 2x$.

1. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^2 + X + 1$, cu rădăcinile complexe x_1, x_2 și

$$g = aX^2 + bX + c, \text{ cu } a \neq 0. \text{ Fie matricele } A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}), A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix} \text{ și } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}.$$

5p a) Să se arate că $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p b) Să se arate că $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p c) Să se arate că $\det(A) = 0$ dacă și numai dacă $a + b + c = 0$ sau $a = b = c$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + 4x$.

5p a) Să se calculeze $f(\hat{0})$ și $f(\hat{1})$.

5p b) Să se arate că funcția f nu este surjectivă.

5p c) Să se descompună polinomul $X^4 + 4X \in \mathbb{Z}_5[X]$ în factori ireductibili peste $\mathbb{Z}_5$.

1. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x}$.

5p a) Să se arate că șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ unde $x_n = f(1) + \frac{1}{2} f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3} f\left(\frac{1}{3}\right) + \dots + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$ este divergent.

5p b) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

5p c) Să se arate că funcția f este descrescătoare.

2. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_0^1 e^{-t} t^{x-1} dt$.

5p a) Să se calculeze $f(2)$.

5p b) Să se demonstreze relația $f(x) \leq \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$.

5p c) Să se demonstreze relația $f(x+1) = xf(x) - \frac{1}{e}$, $\forall x > 1$.