

SUBIECTUL I (30p)

- 5p** 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că numerele $2, a, b$ sunt în progresie geometrică și $2, 17, a$ sunt în progresie aritmetică.
- 5p** 2. Să se rezolve ecuația $f(f(x)) = 0$, știind că $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 2$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea $[0, 2\pi)$ ecuația $\operatorname{tg}(-x) = 1 - 2 \operatorname{tg} x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul funcțiilor $f: \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ care verifică relația $f(2) = 2$.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele D, E astfel încât $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EC}$. Să se arate că dreptele DE și BC sunt paralele.
- 5p** 6. Să se calculeze lungimea razei cercului circumscris triunghiului ABC , dacă $A = \frac{\pi}{4}$, $B = \frac{\pi}{6}$ și $AB = 6$.

1. Pentru $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$ și matricea transpusă A^t .

5p a) Pentru $a = c = 1$ și $b = d = 0$, să se calculeze $\det(A)$.

5p b) Să se arate că $A \cdot A^t = \alpha \cdot I_4$, unde $\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5p c) Să se demonstreze că dacă $A \neq O_4$, atunci A este inversabilă.

2. Se consideră $a, b, c \in \mathbb{R}$ și polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$, cu rădăcinile $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$, astfel încât $|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1, |x_3| \leq 1$.

5p a) Să se demonstreze că $|a| \leq 3$.

5p b) Să se arate că, dacă $c < 0$, polinomul are cel puțin o rădăcină reală în intervalul $(0, \infty)$.

5p c) Să se arate că, dacă $a = 1, c = -1$, atunci $b = -1$.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} - \{-2\} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+2} e^{|x|}$.

5p

a) Să se studieze derivabilitatea funcției f în punctul $x_0 = 0$.

5p

b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

5p

c) Să se determine numărul de rădăcini reale ale ecuației $f(x) = m$, unde m este un parametru real.

2. Se consideră funcțiile $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$ și $g : (0,1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \int_x^1 \frac{\sin t}{t} dt$.

Se admite cunoscut faptul că $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$.

5p

a) Să se calculeze $\int_0^1 f(x) dx$.

5p

b) Să se arate că funcția g este strict descrescătoare.

5p

c) Să se arate că $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) > 0,9$.