

SUBIECTUL I (30p) Varianta 100

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se arate că $\sqrt{6+4\sqrt{2}} \in \{a+b\sqrt{2} \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $|1+x|=1-x$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt[6]{x^2-2x+1} = \sqrt[3]{3-x}$.
- 5p** 4. Să se arate că 11 divide numărul $C_{11}^1 + C_{11}^2 + \dots + C_{11}^{10}$.
- 5p** 5. Fie ABC un triunghi și G centrul său de greutate. Știind că $A(1,1), B(5,2)$ și $G(3,4)$, să se calculeze coordonatele punctului C .
- 5p** 6. Fie $a \in \mathbb{R}$ cu $\operatorname{tg} a = \frac{2}{5}$. Să se calculeze $|\sin a|$.

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se demonstreze că $(I_2 + A)^2 = I_2 + A$.

5p b) Să se demonstreze că mulțimea $\{A^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p c) Să se rezolve ecuația $X^3 = A$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ și polinomul $f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$.

5p a) Să se arate că $f(1) + f(-1)$ este număr par.

5p b) Să se arate că, dacă $f(2)$ și $f(3)$ sunt numere impare, atunci polinomul f nu are nicio rădăcină întreagă.

5p c) Să se arate că polinomul $g = X^3 - X + 3a + 1$, $a \in \mathbb{Z}$, nu poate fi descompus în produs de două polinoame neconstante, cu coeficienți întregi.

SUBIECTUL III (30p)

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^3 - x^2 + x$.

5p

a) Să se arate că funcția f este strict crescătoare.

5p

b) Să se arate că funcția f este inversabilă.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x)}{\ln x}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 3x + 2} dx$.

5p

a) Să se calculeze I_1 .

5p

b) Să se arate că $I_{n+2} + 3I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$.