

SUBIECTUL I (30p) **Varianta 10**

<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 1 = 0$, să se calculeze $z^4 + \frac{1}{z^4}$.
- 5p** 2. Să se determine funcția f de gradul întâi, pentru care $f(f(x)) = 2f(x) + 1$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** 3. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $\lg(x+1) - \lg 9 = 1 - \lg x$.
- 5p** 4. Să se determine numărul termenilor raționali din dezvoltarea $\left(3 + \sqrt[3]{3}\right)^{10}$.
- 5p** 5. Să se determine coordonatele centrului de greutate al triunghiului ABC , știind că $A(-1, 0)$, $B(0, 2)$, $C(2, -1)$.
- 5p** 6. Să se arate că unghiul vectorilor $\vec{u} = 5\vec{i} - 4\vec{j}$ și $\vec{v} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ este obtuz.

SUBIECTUL II (30p)**Varianta 10**<http://www.pro-matematica.ro>

1. Se consideră permutările $e, \alpha \in S_3$, $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

5p a) Să se calculeze α^3 .

5p b) Să se rezolve ecuația $\alpha^{2009} \cdot x = e$, $x \in S_3$.

5p c) Să se demonstreze că, oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

2. Fie inelul $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

5p a) Să se dea exemplu de un număr complex z astfel încât $z \notin \mathbb{Z}[i]$ și $z^2 \in \mathbb{Z}[i]$.

5p b) Să se determine elementele inversabile ale inelului $\mathbb{Z}[i]$.

5p c) Să se arate că mulțimea $H = \{(m+n) + (m-n)i \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Z}[i]$ în raport cu înmulțirea.

1. Se consideră funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln(1 + x^2)$.

5p a) Să se arate că funcția f este convexă pe $\mathbb{R}$.

5p b) Să se arate că funcția f' este mărginită.

5p c) Să se demonstreze că $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră șirul $(I_n)_{n \geq 1}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1 + x^{2n}} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Să se calculeze I_1 .

5p b) Să se arate că $I_n \leq \frac{1}{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p c) Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$.