

SUBIECTUL I (30p)**Varianta 1**<http://www.pro-matematica.ro>

- 5p** 1. Să se determine numărul natural x din egalitatea $1 + 5 + 9 + \dots + x = 231$.
- 5p** 2. Să se rezolve în mulțimea numerelor reale inecuația $2x^2 - 5x + 3 \leq 0$.
- 5p** 3. Să se determine inversa funcției bijective $f : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$, $f(x) = x^2 + 1$.
- 5p** 4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Să se determine numărul submulțimilor cu trei elemente ale mulțimii A , care conțin elementul 1.
- 5p** 5. Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât distanța dintre punctele $A(2, m)$ și $B(m, -2)$ să fie 4.
- 5p** 6. Să se calculeze $\cos \frac{23\pi}{12} \cdot \sin \frac{\pi}{12}$.

1. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$, cu $a, b \in \mathbb{R}$ și $b \neq 0$.

5p a) Să se arate că dacă matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX = XA$, atunci există $u, v \in \mathbb{R}$, astfel încât $X = \begin{pmatrix} u & v \\ v & u \end{pmatrix}$.

5p b) Să se arate că $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \begin{pmatrix} x_n & y_n \\ y_n & x_n \end{pmatrix}$, unde $x_n = \frac{(a+b)^n + (a-b)^n}{2}$, $y_n = \frac{(a+b)^n - (a-b)^n}{2}$.

5p c) Să se rezolve în mulțimea $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ecuația $X^3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. Se consideră $a \in \mathbb{Z}_7$ și polinomul $f = X^6 + aX + \hat{5} \in \mathbb{Z}_7[X]$.

5p a) Să se verifice că, pentru orice $b \in \mathbb{Z}_7$, $b \neq \hat{0}$, are loc relația $b^6 = \hat{1}$.

5p b) Să se arate că $x^6 + \hat{5} = (x^3 - \hat{4})(x^3 + \hat{4})$, $\forall x \in \mathbb{Z}_7$.

5p c) Să se demonstreze că pentru orice $a \in \mathbb{Z}_7$, polinomul f este reductibil în $\mathbb{Z}_7[X]$.

1. Se consideră numărul real $a > 0$ și funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x - ax$.

5p

a) Să se determine asimptota oblică la graficul funcției f către $-\infty$.

5p

b) Să se determine punctele de extrem local ale funcției f .

5p

c) Să se determine $a \in (0, \infty)$, știind că $f(x) \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

2. Se consideră funcția $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

5p

a) Să se arate că funcția $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = 2\sqrt{x}(\ln x - 2)$, este o primitivă a funcției f .

5p

b) Să se arate că orice primitivă G a funcției f este crescătoare pe $[1, \infty)$.

5p

c) Să se calculeze aria suprafeței plane cuprinse între graficul funcției f , axa Ox și dreptele de ecuații

$$x = \frac{1}{e} \text{ și } x = e.$$