BAC Matematica 2025 – sesiunea iunie – M4

Subiectul I

Exercitiul 1

$$3(1{,}5-0{,}3)+\frac{0{,}8}{2}=3\cdot 1{,}2+0{,}4=3{,}6+0{,}4=4.$$

Exercitiul 2

$$f(a)=f(3)-a \Leftrightarrow 2a+1=2\cdot 3+1-a \Leftrightarrow 3a=6 \Leftrightarrow a=2.$$

Exercitiul 3

Conditii de existenta: $5x-12>0$, $2x>0$, adica $x>\frac{12}{5}$.

$$\log_2(5x-12)=\log_2(2x) \Leftrightarrow 5x-12=2x \Leftrightarrow x=4.$$

Valoarea 4 respecta conditiile, deci $S=\{4\}$.

Exercitiul 4

Notand pretul initial cu p,

$$p\left(1+\frac{35}{100}\right)=54 \Leftrightarrow p=54\cdot\frac{100}{135}=40.$$

Pretul initial era 40 de lei.

Exercitiul 5

$$M\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2}\right)=M\left(\frac{2+4}{2},\frac{5+1}{2}\right)=M(3,3).$$

Distanta dintre doua puncte este $PQ=\sqrt{(x_Q-x_P)^2+(y_Q-y_P)^2}$. Astfel,

$$OM=\sqrt{(3-0)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}, \qquad CM=\sqrt{(3-6)^2+(3-0)^2}=3\sqrt{2}.$$

Deci $OM=CM$.

Exercitiul 6

$$5AB = 4BC \Rightarrow BC = \frac{5AB}{4} = \frac{5 \cdot 16}{4} = 20.$$

Din teorema lui Pitagora,

$$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 20^2 - 16^2 = 400 - 256 = 144, \qquad AC = 12.$$

Subiectul II

Exercitiul 1

$$0 * 2 = 0 \cdot 2 - 6(0 + 2) + 14 = -12 + 14 = 2.$$

Exercitiul 2

$$y * x = yx - 6(y + x) + 14 = xy - 6(x + y) + 14 = x * y, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Asadar, legea este comutativa.

Exercitiul 3

$$x * 4 = 4 \Leftrightarrow 4x - 6(x + 4) + 14 = 4 \Leftrightarrow -2x - 10 = 4 \Leftrightarrow x = -7.$$

Exercitiul 4

$$\begin{aligned}(-m) * (-n) &= mn + 6(m + n) + 14,\\ m * n &= mn - 6(m + n) + 14.\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$(-m) * (-n) = (m * n) + 36 \Leftrightarrow 12(m + n) = 36 \Leftrightarrow m + n = 3.$$

Din $0 \leq m < n$, rezulta $2m < 3$, deci $m = 0$ sau $m = 1$. Atunci $n = 3$, respectiv $n = 2$. Perechile cerute sunt $(0, 3)$, $(1, 2)$.

Exercitiul 5

$$\begin{aligned}(1 + 3^x) * (1 - 3^x) &= (1 + 3^x)(1 - 3^x) - 6(1 + 3^x + 1 - 3^x) + 14\\ &= 1 - 3^{2x} - 12 + 14 = 3 - 3^{2x}.\end{aligned}$$

Egalitatea cu zero da $3^{2x} = 3$, deci $2x = 1$, adica $x = \frac{1}{2}$.

Exercitiul 6

$$\begin{aligned} x * \frac{1}{x} &= 1 - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 \\ &= 3 - 6\left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 3 - \frac{6(x-1)^2}{x} \leq 3, \end{aligned}$$

deoarece $x > 0$ si $(x-1)^2 \geq 0$. Inegalitatea este valabila $\forall x \in (0, +\infty)$, cu egalitate pentru $x = 1$.

Subiectul III

Exercitiul 1

$$\det M(1) = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 1.$$

Exercitiul 2

$$M(1) + 2M(4) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 24 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 27 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = 3M(3).$$

Exercitiul 3

$$M(2)M(-2) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} = -8I_2.$$

Deci $a = -8$.

Exercitiul 4

$$M(x) + M(-2x) = \begin{pmatrix} 4 & -3x \\ -x & 4 \end{pmatrix}.$$

Prin urmare,

$$\det(M(x) + M(-2x)) = 4 \Leftrightarrow 16 - 3x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x \in \{-2, 2\}.$$

Exercitiul 5

$$\begin{aligned} M(x)M(-1) + M(y) &= \begin{pmatrix} 2 & 3x \\ x & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3y \\ y & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 - 3x & 6x - 6 + 3y \\ 2x - 2 + y & 6 - 3x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Egalitatea cu $12M(-1)$ este echivalenta cu

$$\begin{cases} 6 - 3x = 24, \\ 6x - 6 + 3y = -36, \\ 2x - 2 + y = -12. \end{cases}$$

Prima ecuatie da $x = -6$, ultima da $-14+y = -12$, deci $y = 2$. A doua se verifica: $-36-6+6 = -36$. Asadar, $(x, y) = (-6, 2)$.

Exercitiul 6

$$2M(1) + nI_2 = \begin{pmatrix} n+4 & 6 \\ 2 & n+4 \end{pmatrix},$$

$$N = (n+4)^2 - 12 = n^2 + 8n + 4.$$

Pentru $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$,

$$N = 4k^2 + 16k + 4 = 4(k^2 + 4k + 1).$$

Numarul $k^2 + 4k + 1$ este natural, deci N este natural si multiplu de 4, $\forall n \in 2\mathbb{N}$.