BAC Matematica 2025 – sesiunea iunie – M2

Subiectul I

Exercitiul 1

Ratia progresiei aritmetice este

$$r = a_2 - a_1 = 15 - 4 = 11.$$

Prin urmare,

$$a_3 = a_2 + r = 15 + 11 = 26.$$

Exercitiul 2

$$f(2) = 3 \cdot 2 - 2 = 4.$$

Conditia din enunt devine

$$f(a) + f(2) = 2a \quad \Longleftrightarrow \quad 3a - 2 + 4 = 2a,$$

deci

$$a = -2.$$

Exercitiul 3

Conditiile de existenta sunt

$$x^2 - 3x + 2 > 0 \quad \text{si} \quad x + 2 > 0.$$

Pe domeniul de existenta,

$$x^2 - 3x + 2 = x + 2,$$
$$x^2 - 4x = 0,$$
$$x(x - 4) = 0.$$

Valorile 0 si 4 verifica ambele conditii de existenta, deci

$$S = \{0, 4\}.$$

Exercitiul 4

Cifra unitatilor poate fi 2 sau 8, iar cifra zecilor poate fi aleasa apoi in 5 moduri dintre cifrele ramase. Numarul cautat este

$$2 \cdot 5 = 10.$$

Exercitiul 5

$$C\left(\frac{0+8}{2}, \frac{0+4}{2}\right) = (4, 2).$$

Folosind formula distantei dintre doua puncte, obtinem

$$AO = \sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2} = 5$$

si

$$AC = \sqrt{(0-4)^2 + (5-2)^2} = 5.$$

Prin urmare,

$$AO = AC.$$

Exercitiul 6

In triunghiul dreptunghic ABC,

$$\cos B = \frac{AB}{BC}.$$

Asadar,

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{BC} \quad \Rightarrow \quad BC = 6.$$

Subiectul II

Exercitiul 1

a)

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} -2 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= (-2) \cdot 3 - 8 \cdot (-1) \\ &= 2. \end{aligned}$$

b) Deoarece $\det A = 2 \neq 0$, matricea A este inversabila si

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -4 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}.$$

Pe de alta parte,

$$\frac{1}{2}(I_2 - A) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = A^{-1}.$$

Prin urmare, pentru $B = \frac{1}{2}(I_2 - A)$, avem

$$AB = BA = I_2.$$

c) Din punctul precedent,

$$A - I_2 = -2A^{-1}.$$

Ecuatia devine

$$-2A^{-1}X = 2A.$$

Inmultind la stanga cu A, obtinem

$$-2X = 2A^2, \qquad X = -A^2.$$

Cum

$$A^2 = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

rezulta

$$X = \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exercitiul 2

a)

$$1 * 4 = 1 + 4 - \sqrt{1 \cdot 4} = 3.$$

b) Pentru $x \geq 0$, avem $\sqrt{9x^2} = 3x$, astfel ca

$$x * (9x) = x + 9x - \sqrt{9x^2} = 7x.$$

Ecuatia devine

$$7x = x^2 \quad \Longleftrightarrow \quad x(x-7) = 0.$$

Ambele valori apartin multimii M, deci

$$S = \{0, 7\}.$$

c)

$$\begin{aligned} 2^x * 2^{x+2} &= 2^x + 2^{x+2} - \sqrt{2^x \cdot 2^{x+2}} \\ &= 2^x + 4 \cdot 2^x - 2^{x+1} \\ &= 3 \cdot 2^x. \end{aligned}$$

Prin urmare,

$$3 \cdot 2^x = 6^x = 2^x 3^x.$$

Impartind prin $2^x > 0$, obtinem $3 = 3^x$, deci

$$x = 1.$$

Subiectul III

Exercitiul 1

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}(x^2+x+2) - 2\sqrt{x}(2x+1)}{(x^2+x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+x+2-2x(2x+1)}{\sqrt{x}(x^2+x+2)^2} \\ &= \frac{-3x^2-x+2}{\sqrt{x}(x^2+x+2)^2}. \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^2+x+2} = 0.$$

Asadar, dreapta

$$y = 0$$

este asimptota orizontala spre $+\infty$ la graficul functiei.

c) Tangenta in punctul de abscisa a este paralela cu axa absciselor daca si numai daca $f'(a) = 0$. Deoarece numitorul derivatei este pozitiv,

$$\begin{aligned} -3a^2 - a + 2 &= 0, \\ (3a-2)(a+1) &= 0. \end{aligned}$$

Cum $a > 0$, rezulta

$$a = \frac{2}{3}.$$

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned} \int_0^2 (f(x) - 3x - 3)\,dx &= \int_0^2 x^3\,dx \\ &= \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 \\ &= 4. \end{aligned}$$

b) Deoarece $f(x) - x^3 = 3x + 3$, cu substitutia $t = 3x + 3$ avem $dt = 3\,dx$, iar capetele devin 3 si 6. Astfel,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{(f(x)-x^3)^2}\,dx &= \frac{1}{3}\int_3^6 \frac{1}{t^2}\,dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{t}\Big|_3^6 \\ &= \frac{1}{18}. \end{aligned}$$

c)

$$\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\ln x\,dx = \int_1^e \left(x+\frac{3}{x}\right)\ln x\,dx$$
$$= \int_1^e x\ln x\,dx + 3\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Pentru prima integrala folosim integrarea prin parti, cu

$$u=\ln x, \qquad dv = x\,dx, \qquad du = \frac{1}{x}\,dx, \qquad v=\frac{x^2}{2}.$$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \left(\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right)\Big|_1^e$$
$$= \frac{e^2+1}{4}.$$

Pentru a doua integrala, substitutia $t=\ln x$ da

$$3\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = 3\int_0^1 t\,dt = \frac{3}{2}.$$

Prin urmare,

$$\int_1^e \frac{f(x)-3}{x^2}\ln x\,dx = \frac{e^2+7}{4}.$$

Rezulta

$$m=7.$$