

BAC Matematica 2025 – M1

Subiectul I

Exercitiul 1

$$2z_1 + iz_2 = 2(1 - i) + i(2 + i) = 2 - 2i + 2i + i^2 = 1.$$

Concluzie: egalitatea este adevarata.

Exercitiul 2

$$(f \circ f)(a) = 9$$

$$f(f(a)) = 9,$$

$$f(a + 3) = 9,$$

$$a + 3 + 3 = 9,$$

$$a + 6 = 9,$$

$$a = 3.$$

Concluzie: $a = 3$.

Exercitiul 3

Conditii de existenta:

$$2x^2 - 3x + 2 \geq 0, \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = -7 < 0.$$

x	$-\infty$	$\frac{3}{4}$	$+\infty$
$2x^2 - 3x + 2$	+	$\frac{7}{8}$	+

Deoarece coeficientul lui x^2 este pozitiv, rezulta

$$2x^2 - 3x + 2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Din egalitatea data mai rezulta $x \geq 0$. Atunci

$$\sqrt{2x^2 - 3x + 2} = x,$$

$$2x^2 - 3x + 2 = x^2,$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0,$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1,$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{2},$$

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Ambele valori verifica $x \geq 0$, deci

$$S = \{1, 2\}.$$

Exercitiul 4

Multimea numerelor naturale de doua cifre are 90 elemente. Pentru 64,

$$D_{64} = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}.$$

Divizorii de doua cifre sunt 16, 32 si 64, deci exista 3 cazuri favorabile. Prin urmare,

$$P = \frac{3}{90} = \frac{1}{30}.$$

Exercitiul 5

Daca M este mijlocul segmentului AC , atunci

$$M\left(\frac{0+6}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = M(3, 2).$$

Cum M este si mijlocul segmentului BD , obtinem

$$\begin{aligned} 3 &= \frac{5+x_D}{2}, \\ 2 &= \frac{y_D}{2}, \end{aligned}$$

de unde

$$x_D = 1, \quad y_D = 4.$$

Concluzie: $D(1, 4)$.

Exercitiul 6

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}, \quad 3 = \frac{AC}{2} \quad \Rightarrow \quad AC = 6.$$

In triunghiul dreptunghic ABC ,

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2, \\ BC^2 &= 2^2 + 6^2 = 4 + 36 = 40, \\ BC &= 2\sqrt{10}. \end{aligned}$$

Concluzie: $BC = 2\sqrt{10}$.

Subiectul II

Exercitiul 1

a)

$$A(1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -9 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\det(A(1)) = (-1) \cdot 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 9,$$

$$\det(A(1)) = -10 + 18 = 8.$$

Concluzie: $\det(A(1)) = 8$.

b)

$$\begin{aligned} A(x)A(y) &= \begin{pmatrix} 2-3x & 0 & x \\ 0 & 2 & 0 \\ -9x & 0 & 2+3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-3y & 0 & y \\ 0 & 2 & 0 \\ -9y & 0 & 2+3y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2x+2y \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 0 & 4+6x+6y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pe de alta parte,

$$2A(x+y) = \begin{pmatrix} 4-6x-6y & 0 & 2x+2y \\ 0 & 4 & 0 \\ -18x-18y & 0 & 4+6x+6y \end{pmatrix}.$$

Rezulta

$$A(x)A(y) = 2A(x+y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

c)

$$\begin{aligned} (A(x) + A(3x))A(2x) &= 4A(x^2), \\ A(x)A(2x) + A(3x)A(2x) &= 4A(x^2). \end{aligned}$$

Folosind rezultatul de la punctul b),

$$\begin{aligned} 2A(3x) + 2A(5x) &= 4A(x^2), \\ A(3x) + A(5x) &= 2A(x^2). \end{aligned}$$

Comparand elementele de pe prima linie,

$$\begin{aligned} 3x + 5x &= 2x^2, \\ x^2 - 4x &= 0, \\ x(x-4) &= 0. \end{aligned}$$

Concluzie:

$$x \in \{0, 4\}.$$

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned} f(1) &= a \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^2 - a \cdot 1 - 6, \\ f(1) &= a + 3 - a - 6 = -3. \end{aligned}$$

Concluzie: $f(1) = -3, \forall a \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $a = 1$, impartirea lui $x^3 + 3x^2 - x - 6$ la $x^2 + 3x - 1$ se scrie

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 3x^2 - x - 6 & x^2 + 3x - 1 \\ -x^3 - 3x^2 + x & x \\ \hline & -6 \end{array}$$

de unde

$$x^3 + 3x^2 - x - 6 = x(x^2 + 3x - 1) - 6.$$

Concluzie: $q = x$ si $r = -6$.

c) Notam cu x_1, x_2, x_3 radacinile lui f , cu $a \neq 0$. Din relatiile lui Viete,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{3}{a}, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 &= -1, \\ x_1x_2x_3 &= \frac{6}{a}. \end{aligned}$$

Atunci

$$\begin{aligned} (1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) &= 1 + x_1 + x_2 + x_3 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1x_2x_3 \\ &= 1 - \frac{3}{a} - 1 + \frac{6}{a} \\ &= \frac{3}{a}. \end{aligned}$$

Cum $(1 + x_1)(1 + x_2)(1 + x_3) = 1$, rezulta

$$1 = \frac{3}{a} \quad \Rightarrow \quad a = 3.$$

Concluzie: $a = 3$.

Subiectul III

Exercitiul 1

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x + \ln \frac{x}{x+2} \right)' \\ &= 2 + \frac{\left(\frac{x}{x+2} \right)'}{\frac{x}{x+2}} \\ &= 2 + \frac{\frac{(x+2) - x}{(x+2)^2}}{\frac{x}{x+2}} \\ &= 2 + \frac{2}{x(x+2)} \\ &= \frac{2x(x+2) + 2}{x(x+2)} \\ &= \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}. \end{aligned}$$

Concluzie:

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2}{x(x+2)}, \quad x \in (0, +\infty).$$

b)

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \ln \frac{x}{x+2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{\ln \frac{x}{x+2}}{x} \right) = 2, \\ n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{x}{x+2} \\ &= \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

Concluzie: dreapta $y = 2x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) Din punctul a),

$$\frac{2(x+1)^2}{x(x+2)} > 0, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

Mai mult,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	0^+	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

Concluzie: f este strict crescătoare, deci injectivă, iar $\text{Im } f = \mathbb{R}$.

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot (-2)(e^x + 1)^{-3} \cdot e^x \\ &= \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}. \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\frac{f(e^x)}{e^x} = \frac{(e^x)^2}{(e^x + 1)^3} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3}.$$

Concluzie:

$$g'(x) = \frac{f(e^x)}{e^x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

b)

$$e^x > 0, \quad (e^x + 1)^3 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prin urmare,

$$g'(x) = \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Concluzie: g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Din punctul b), $g'(x) > 0$ pe $\mathbb{R}$, astfel încât

$$A = \int_{-1}^1 |g'(x)| dx = \int_{-1}^1 \frac{e^x}{(e^x + 1)^3} dx.$$

Cu substituția $t = e^x + 1$, $dt = e^x dx$, iar pentru $x = -1$, $t = 1 + e^{-1}$, respectiv pentru $x = 1$, $t = 1 + e$, obținem

$$\begin{aligned} A &= \int_{1+e^{-1}}^{1+e} \frac{1}{t^3} dt \\ &= -\frac{1}{2t^2} \Big|_{1+e^{-1}}^{1+e} \\ &= -\frac{1}{2(1+e)^2} + \frac{1}{2(1+e^{-1})^2} \\ &= -\frac{1}{2(e+1)^2} + \frac{e^2}{2(e+1)^2} \\ &= \frac{e^2 - 1}{2(e+1)^2} \\ &= \frac{e-1}{2(e+1)}. \end{aligned}$$

Concluzie:

$$A = \frac{e-1}{2(e+1)}.$$