BAC Matematica 2024 – sesiunea iunie – M4

Subiectul I

Exercitiul 1

$$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{8}{4} = 2, \qquad b_3 = b_2 q = 8 \cdot 2 = 16.$$

Exercitiul 2

$$f(a) = 9 \Leftrightarrow 7a + 2 = 9 \Leftrightarrow 7a = 7 \Leftrightarrow a = 1.$$

Exercitiul 3

Conditii de existenta: $2x + 3 > 0$, $3x + 1 > 0$, adica $x > -\frac{1}{3}$.

$$\log_2(2x + 3) = \log_2(3x + 1) \Leftrightarrow 2x + 3 = 3x + 1 \Leftrightarrow x = 2.$$

Valoarea 2 respecta conditiile, deci $S = \{2\}$.

Exercitiul 4

Notand pretul initial cu p,

$$\frac{25}{100}p = 50 \Rightarrow p = 200.$$

Pretul inainte de scumpire era 200 de lei.

Exercitiul 5

$$M\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) = M\left(\frac{0+8}{2}, \frac{4+4}{2}\right) = M(4, 4).$$

Formula distantei este $PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$, deci

$$BM = \sqrt{(4-8)^2 + (4-4)^2} = 4, \qquad CM = \sqrt{(4-4)^2 + (4-0)^2} = 4.$$

Prin urmare, $BM = CM$.

Exercitiul 6

$$AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Perimetrul este $P_{ABC} = AB + BC + AC = 12 + 13 + 5 = 30$.

Subiectul II

Exercitiul 1

$$1 \circ 1 = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + 1 = 3.$$

Exercitiul 2

$$x \circ x = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x} + 1 = 2 \Leftrightarrow x = 2,$$

iar $2 \in M$, deci aceasta valoare convine.

Exercitiul 3

$$y \circ x = \frac{1}{y} + \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + 1 = x \circ y, \qquad \forall x, y \in M.$$

Deci legea este comutativa.

Exercitiul 4

Pentru $x > 0$, si $\frac{1}{x} \in M$, iar

$$x \circ \frac{1}{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + x + 1 = 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0.$$

Rezulta $x = 1 \in M$, care verifica ecuatia.

Exercitiul 5

$$(n+1) \circ (n+1) = \frac{2}{n+1} + 1.$$

Cum $n+1$ este natural nenul, expresia este naturala exact cand $n+1$ divide 2, deci $n+1 = 1$ sau $n+1 = 2$. Rezulta $n \in \{0, 1\}$, valorile expresiei fiind 3, respectiv 2.

Exercitiul 6

Pentru $x > 1$, notam $t = \log_2 x > 0$.

$$\log_x 2 = \frac{\log_2 2}{\log_2 x} = \frac{1}{t} > 0,$$

deci ambele argumente ale legii apartin lui M. Ecuatia devine

$$\begin{aligned}(\log_2 x) \circ (\log_x 2) = \frac{7}{2} &\Leftrightarrow \frac{1}{t} + t + 1 = \frac{7}{2} \\ &\Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow (2t-1)(t-2) = 0.\end{aligned}$$

Astfel, $t = \frac{1}{2}$ sau $t = 2$, de unde $x = \sqrt{2}$ sau $x = 4$. Ambele valori sunt mai mari decat 1 si convin.

Subiectul III

Exercitiul 1

$$\det A(6) = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 \cdot 0 - 2 \cdot 2 = -4.$$

Exercitiul 2

$$A(3)A(1) = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 0 \\ 0 & 19 \end{pmatrix} = 19I_2.$$

Exercitiul 3

$$\begin{aligned} A(a) + A(-a) &= \begin{pmatrix} a+2 & 2 \\ 2 & a-6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2-a & 2 \\ 2 & -a-6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 4 & -12 \end{pmatrix} = 2A(0), \end{aligned}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$.

Exercitiul 4

$$\det A(a) = (a+2)(a-6) - 4 = a^2 - 4a - 16.$$

$$\det A(a) = -20 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow (a-2)^2 = 0 \Leftrightarrow a = 2.$$

Exercitiul 5

$$A(a^2) - A(a) = \begin{pmatrix} a^2 - a & 0 \\ 0 & a^2 - a \end{pmatrix}.$$

Egalitatea cu $2I_2$ este echivalenta cu

$$a^2 - a = 2 \Leftrightarrow (a-2)(a+1) = 0.$$

Solutiile sunt $a = 2$ si $a = -1$.

Exercitiul 6

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = -1, \\ 2x - 7y = 9. \end{cases}$$

Din prima ecuatie, $x = -1 - 2y$. Inlocuind in a doua,

$$2(-1-2y) - 7y = 9 \Leftrightarrow -11y = 11 \Leftrightarrow y = -1,$$

iar $x = 1$. Verificarea este $1 + 2(-1) = -1$, $2 - 7(-1) = 9$. Deci $(x, y) = (1, -1)$.