BAC Matematica 2024 – examen – M3

Subiectul I

Exercitiul 1

$$\frac{12}{5}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)=\frac{12}{5}\cdot\frac{5}{6}=2.$$

Exercitiul 2

$$f(a)=6\Leftrightarrow 5a+1=6\Leftrightarrow a=1.$$

Exercitiul 3

Conditii de existenta si compatibilitate: $4x+1\geq 0$, $3\geq 0$, deci $x\geq -\frac{1}{4}$. Pe acest domeniu,

$$\sqrt{4x+1}=3\Leftrightarrow 4x+1=9\Leftrightarrow x=2.$$

Valoarea 2 verifica ecuatia initiala, deci $S=\{2\}$.

Exercitiul 4

Multimea are noua elemente. Numerele divizibile cu 20 sunt $20, 40, 60, 80$, deci sunt patru cazuri favorabile din noua posibile. Probabilitatea ceruta este $P=\frac{4}{9}$.

Exercitiul 5

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=\sqrt{(8-2)^2+(8-0)^2}=10,$$
$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(11-8)^2+(4-8)^2}=5.$$

Asadar, $AB=2BC$.

Exercitiul 6

$$1+\sin 30^\circ=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},\qquad 2\sin 60^\circ\cos 30^\circ=2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}.$$

Cele doua membre sunt egale.

Subiectul II

Exercitiul 1

a)

$$\det A(1) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-2) = 2.$$

b)

$$A(2) + A(0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = 2A(1).$$

c)

$$\det(A(x) + xI_2) = \begin{vmatrix} 2x & x-1 \\ -2x & x+2 \end{vmatrix} = 2x(x+2) + 2x(x-1) = 4x^2 + 2x.$$

Prin urmare,

$$\det(A(x) + xI_2) = 2 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow (2x-1)(x+1) = 0.$$

Solutiile sunt $x = -1$ si $x = \dfrac{1}{2}$; ambele dau determinantul 2.

Exercitiul 2

a)

$$1 \circ 3 = 2(1+3) - 1 \cdot 3 - 4 = 8 - 3 - 4 = 1.$$

b)

$$x \circ y = 2(x+y) - xy - 4 = 2(y+x) - yx - 4 = y \circ x, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Asadar, legea este comutativa.

c)

$$n \circ n \geq n - 2 \Leftrightarrow 4n - n^2 - 4 \geq n - 2 \Leftrightarrow (n-1)(n-2) \leq 0 \Leftrightarrow n \in [1, 2].$$

Intersectand cu $\mathbb{N}$, obtinem $n \in \{1, 2\}$.

Subiectul III

Exercitiul 1

a)

$$f'(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2}\right)' = \frac{2x^2 - 2x(2x-1)}{x^4} = \frac{2(1-x)}{x^3}, \quad \forall x > 0.$$

b)

$$f(1) = 1, \qquad f'(1) = 0.$$

Tangenta are ecuatia $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, deci

$$y - 1 = 0(x-1) \Leftrightarrow y = 1.$$

c) Deoarece $x^3 > 0$, $f'(x) > 0$ pentru $0 < x < 1$, $f'(1) = 0$, iar $f'(x) < 0$ pentru $x > 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Functia este strict crescatoare pe $(0, 1]$ si strict descrescatoare pe $[1, +\infty)$.

Exercitiul 2

a)

$$\int_0^1 (x^2 + x + 1) f(x)\, dx = \int_0^1 (2x + 1)\, dx = (x^2 + x)\Big|_0^1 = 2.$$

b)

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

Cu substitutia $t = x^2 + x + 1$, $dt = (2x + 1)\, dx$, capetele devin $t = 1$ pentru $x = 0$ si $t = 3$ pentru $x = 1$. Astfel,

$$\int_0^1 \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1}\, dx = \int_1^3 \frac{1}{t}\, dt = \ln t|_1^3 = \ln 3.$$

c) Pe $[0, 1]$, $e^x > 0$ si $2x + 1 > 0$, deci $g(x) = e^x(2x + 1) > 0$. Aria este

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |g(x)|\, dx = \int_0^1 (2x + 1)e^x\, dx.$$

Prin parti, cu $u = 2x + 1$, $dv = e^x\, dx$, $du = 2\, dx$, $v = e^x$,

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (2x + 1)e^x|_0^1 - 2\int_0^1 e^x\, dx \\ &= 3e - 1 - 2e^x|_0^1 = 3e - 1 - 2(e - 1) = e + 1. \end{aligned}$$