BAC Matematica 2024 – sesiunea iunie – M2

Subiectul I

Exercitiul 1

Ratia progresiei aritmetice este

$$r = a_3 - a_2 = 12 - 8 = 4.$$

Prin urmare,

$$a_1 = a_2 - r = 8 - 4 = 4.$$

Exercitiul 2

Conditia $f(m) = m$ devine

$$3m - 2 = m.$$

Rezulta

$$m = 1.$$

Exercitiul 3

Conditia de existenta este $9 - x^2 > 0$. Pe domeniul de existenta, injectivitatea functiei logaritmice da

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= 5, \\ x^2 &= 4. \end{aligned}$$

Valorile -2 si 2 verifica conditia de existenta, deci

$$S = \{-2, 2\}.$$

Exercitiul 4

Conditia $\sqrt{2n+1} \in A$ este indeplinita pentru $n = 0$ si $n = 4$:

$$\sqrt{2 \cdot 0 + 1} = 1, \qquad \sqrt{2 \cdot 4 + 1} = 3.$$

Acestea sunt singurele cazuri favorabile dintre cele 10 valori ale lui n, deci

$$P = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.$$

Exercitiul 5

$$\overrightarrow{CA} = (-4, -2), \qquad \overrightarrow{CB} = (-1, 2).$$

Produsul scalar este

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (-4)(-1) + (-2) \cdot 2 = 0.$$

Asadar, $CA \perp CB$, deci triunghiul ABC este dreptunghic in C.

Exercitiul 6

$$\begin{aligned} E\left(\frac{\pi}{3}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin^2\frac{\pi}{4} \\ &= 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \\ &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 2. \end{aligned}$$

Subiectul II

Exercitiul 1

a)

$$\begin{aligned} \det B(1) &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2) \\ &= 7. \end{aligned}$$

b)

$$B(2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B(1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$B(0)B(1) = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}.$$

Asadar,

$$B(2) - B(0)B(1) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix} = 4A.$$

c)

$$C(a) = B(a) - aA = \begin{pmatrix} 0 & a+1 \\ a-3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Matricea $C(a)$ nu este inversabila daca si numai daca

$$\det C(a) = -(a+1)(a-3) = 0.$$

Prin urmare,

$$a \in \{-1, 3\}.$$

Exercitiul 2

a)

$$2 * 2 = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 6 = 0.$$

b)

$$x * 6 = 6x - 2x - 18 + 6 = 4x - 12.$$

Ecuatia $x * 6 = x$ devine

$$4x - 12 = x,$$

de unde

$$x = 4.$$

c)

$$2 * x = 2x - 4 - 3x + 6 = 2 - x,$$

iar

$$x * (2 * x) = x * (2 - x) = -x^2 + 3x.$$

Inecuatia devine

$$\begin{aligned} -x^2 + 3x &\geq 2, \\ (x-1)(x-2) &\leq 0. \end{aligned}$$

Rezulta

$$x \in [1, 2].$$

Subiectul III

Exercitiul 1

a) Deoarece $x^2 + x + 4 > 0$ pentru orice $x \in \mathbb{R}$, functia este derivabila pe $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x^2 + x + 4) - 2x(2x + 1)}{(x^2 + x + 4)^2} \\ &= \frac{2(4 - x^2)}{(x^2 + x + 4)^2}. \end{aligned}$$

b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 + x + 4} = 0.$$

Asadar, dreapta

$$y = 0$$

este asimptota orizontala spre $+\infty$ la graficul functiei.

c) Numitorul derivatei este pozitiv, deci semnul lui $f'(x)$ este semnul lui $4-x^2$. Functia este descrescatoare pe $(-\infty,-2]$, crescatoare pe $[-2,2]$ si descrescatoare pe $[2,+\infty)$. Pentru $x \geq 4$,

$$f(x) \leq f(4) = \frac{1}{3}.$$

De asemenea, $4-x \leq 0$, iar valoarea minima a functiei pe $(-\infty, 0]$ este

$$f(-2) = -\frac{2}{3}.$$

Prin urmare,

$$f(x) - f(4-x) \leq \frac{1}{3} - \left(-\frac{2}{3}\right) = 1.$$

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned}\int_0^2 (x+1)f(x)\,dx &= \int_0^2 (x+3)\,dx \\ &= \left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_0^2 \\ &= 8.\end{aligned}$$

b)

$$f(x) = \frac{x+3}{x+1} = 1 + \frac{2}{x+1}.$$

Asadar,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx &= \left(x+2\ln(x+1)\right)\Big|_0^1 \\ &= 1+2\ln 2.\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}(x^2-1)e^x f(x) &= (x-1)(x+1)e^x\frac{x+3}{x+1} \\ &= (x^2+2x-3)e^x \\ &= \Big((x^2-3)e^x\Big)'.\end{aligned}$$

Prin urmare,

$$\begin{aligned}\int_1^2 (x^2-1)e^x f(x)\,dx &= (x^2-3)e^x\Big|_1^2 \\ &= e^2+2e \\ &= e(e+2).\end{aligned}$$

Din $e(e+a) = e(e+2)$, rezulta

$$a = 2.$$