

BAC Matematica 2024 – M1

Subiectul I

Exercitiul 1

$$\begin{aligned}2 \lg 100 + \lg 2 + \lg 5 &= 2 \lg 10^2 + \lg(2 \cdot 5) \\&= 4 + \lg 10 \\&= 4 + 1 = 5.\end{aligned}$$

Concluzie: egalitatea este adevarata.

Exercitiul 2

$$\begin{aligned}f(a) + f(3a) &= 0, \\a - 6 + 3a - 6 &= 0, \\4a &= 12, \\a &= 3.\end{aligned}$$

Concluzie: $a = 3$.

Exercitiul 3

$$\begin{aligned}5^{3x} \cdot 5^2 &= 5^x, \\5^{3x+2} &= 5^x, \\3x + 2 &= x, \\2x &= -2, \\x &= -1.\end{aligned}$$

Concluzie: $S = \{-1\}$.

Exercitiul 4

Numerele pare ale multimii A sunt 2, 4, 6 si 8, deci A contine 4 numere pare. O submultime ceruta se obtine alegand doua dintre acestea, astfel incat numarul submultimilor este

$$C_4^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} = 6.$$

Exercitiul 5

Notam $C(x_C, y_C)$. Atunci

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - 3, y_C - 1), \quad \overrightarrow{OB} = (3, 0).$$

Din $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OB}$ rezulta

$$x_C - 3 = 3, \quad y_C - 1 = 0,$$

deci $C(6, 1)$.

Exercitiul 6

Triunghiul ABC este dreptunghic in A , deci $B + C = \frac{\pi}{2}$. Din $B = \frac{\pi}{4}$ rezulta $C = \frac{\pi}{4}$, prin urmare triunghiul este isoscel si

$$AC = AB.$$

Atunci

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{AB^2}{2} = 18,$$

de unde $AB^2 = 36$. Cum $AB > 0$, obtinem $AB = 6$.

Subiectul II

Exercitiul 1

a)

$$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \det(M(1)) &= 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 2 \\ &\quad - 0 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot 3 - 1 \cdot 1 \cdot 2 \\ &= 9 + 0 + 0 - 0 - 0 - 2 \\ &= 7. \end{aligned}$$

Concluzie: $\det(M(1)) = 7$.

b)

$$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} M(x) \cdot M(2) &= \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x+2 & x \\ 0 & 2x & x+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 8x+8 & 6x+4 \\ 0 & 12x+8 & 8x+8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pe de alta parte,

$$M(x-1) = \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x+1 & x-1 \\ 0 & 2x-2 & x+1 \end{pmatrix}.$$

Egalitatea $M(x) \cdot M(2) = M(x-1)$ da, pe pozitia $(1,1)$,

$$2x = x - 1 \quad \Rightarrow \quad x = -1.$$

Pentru $x = -1$, ambele matrice devin

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix},$$

deci egalitatea este verificata.

Concluzie: $x = -1$.

c)

$$\begin{aligned} \det(M(x)) &= x(x+2)(x+2) + 0 \cdot x \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 2x \\ &\quad - 0 \cdot (x+2) \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot (x+2) - x \cdot x \cdot 2x \\ &= x(x+2)^2 - 2x^3 \\ &= x(x^2 + 4x + 4 - 2x^2) \\ &= x(-x^2 + 4x + 4). \end{aligned}$$

Pentru orice numar natural n ,

$$\det(M(n)) = n(-n^2 + 4n + 4), \quad \det(M(2n)) = 2n(-4n^2 + 8n + 4).$$

Inegalitatea din enunt devine

$$\begin{aligned} 2n(-n^2 + 4n + 4) &\leq 2n(-4n^2 + 8n + 4), \\ 2n(-n^2 + 4n + 4 + 4n^2 - 8n - 4) &\leq 0, \\ 2n(3n^2 - 4n) &\leq 0, \\ 2n^2(3n - 4) &\leq 0, \\ n^2(3n - 4) &\leq 0. \end{aligned}$$

Pentru $n = 0$ inegalitatea devine $0 \leq 0$, deci este verificata. Pentru $n \in \mathbb{N}^*$ avem $n^2 > 0$, astfel incat inegalitatea este echivalenta cu

$$3n - 4 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad n \leq \frac{4}{3},$$

iar singurul numar natural nenul care verifica aceasta conditie este $n = 1$.

Concluzie: $n \in \{0, 1\}$.

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned} f(2) &= 2^3 - 2 \cdot 2^2 - a \cdot 2 + 2a, \\ f(2) &= 8 - 8 - 2a + 2a = 0. \end{aligned}$$

Concluzie: $f(2) = 0, \forall a \in \mathbb{R}$.

b) Pentru $a = 1$,

$$f = X^3 - 2X^2 - X + 2.$$

Conform teoremei restului, restul impartirii lui f la $g = X + 1$ este

$$\begin{aligned} f(-1) &= (-1)^3 - 2(-1)^2 - (-1) + 2 \\ &= -1 - 2 + 1 + 2 = 0. \end{aligned}$$

Concluzie: f este divizibil cu $g = X + 1$.

c)

$$\begin{aligned} f &= X^3 - 2X^2 - aX + 2a \\ &= X^2(X - 2) - a(X - 2) \\ &= (X - 2)(X^2 - a). \end{aligned}$$

Cum $a \in (0, +\infty)$, radacinile polinomului sunt

$$x_1 = 2, \quad x_2 = \sqrt{a}, \quad x_3 = -\sqrt{a},$$

deci

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| = 2 + 2\sqrt{a}.$$

Conditia din enunt devine

$$\begin{aligned} 2 + 2\sqrt{a} &= 8, \\ \sqrt{a} &= 3, \\ a &= 9. \end{aligned}$$

Concluzie: $a = 9$.

Subiectul III

Exercitiul 1

a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(e^x(2x - 4) + x^2 - 2x + 4 \right)' \\ &= e^x(2x - 4) + 2e^x + 2x - 2 \\ &= e^x(2x - 2) + 2x - 2 \\ &= 2(x - 1)e^x + 2(x - 1) \\ &= 2(x - 1)(e^x + 1). \end{aligned}$$

Concluzie: $f'(x) = 2(x - 1)(e^x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$.

b)

$$f(0) = e^0(0 - 4) + 0 - 0 + 4 = -4 + 4 = 0, \quad 1 - e^0 = 0.$$

Limita este de tip 0/0. Aplicand regula lui l'Hospital,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(1 - e^x)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(x - 1)(e^x + 1)}{-e^x} \\ &= \frac{2 \cdot (-1) \cdot 2}{-1} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Concluzie: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - e^x} = 4$.

c) Pentru orice $x \in \mathbb{R}$ avem $e^x + 1 > 0$, deci semnul lui $f'(x)$ este semnul lui $x - 1$. Mai mult,

$$f(1) = e(2 - 4) + 1 - 2 + 4 = 3 - 2e < 0,$$

deoarece $e > \frac{3}{2}$. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x(2x - 4) = 0$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 4) = +\infty$, obtinem

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - 2e$	$+\infty$

Functia f este continua pe $\mathbb{R}$, strict descrescatoare pe $(-\infty, 1]$ si strict crescatoare pe $[1, +\infty)$, astfel incat

$$f((-\infty, 1]) = [3 - 2e, +\infty), \quad f([1, +\infty)) = [3 - 2e, +\infty).$$

Cum $0 > 3 - 2e$, valoarea 0 este atinsa exact o data pe fiecare dintre cele doua intervale de monotonicitate, iar din $f(1) \neq 0$ rezulta ca cele doua solutii sunt distincte.

Concluzie: ecuatia $f(x) = 0$ are exact doua solutii.

Exercitiul 2

a)

$$\begin{aligned} \int_3^4 f(x) (3x^2 + 1) dx &= \int_3^4 4x dx \\ &= 2x^2 \Big|_3^4 \\ &= 32 - 18 \\ &= 14. \end{aligned}$$

b) Cu substitutia $t = 3x^2 + 1$ avem $dt = 6x dx$, iar capetele devin $t = 1$ pentru $x = 0$ si $t = 4$ pentru $x = 1$, astfel incat

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 \frac{4x}{3x^2 + 1} dx \\ &= \frac{2}{3} \int_1^4 \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{2}{3} \ln t \Big|_1^4 \\ &= \frac{2}{3} \ln 4 - \frac{2}{3} \ln 1 \\ &= \frac{4}{3} \ln 2.\end{aligned}$$

c)

$$g(x) = \frac{4 \ln x}{f(x)} = \frac{4 \ln x (3x^2 + 1)}{4x} = \frac{(3x^2 + 1) \ln x}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

Pentru $x \in [1, e]$ avem $\ln x \geq 0$, deci $g(x) \geq 0$ si

$$\mathcal{A} = \int_1^e g(x) dx = \int_1^e \left(3x + \frac{1}{x} \right) \ln x dx.$$

Pentru primul termen aplicam integrarea prin parti:

$$u = \ln x, \quad dv = 3x dx, \quad du = \frac{1}{x} dx, \quad v = \frac{3x^2}{2}.$$

Atunci

$$\begin{aligned}\int_1^e 3x \ln x dx &= \frac{3x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \frac{3x}{2} dx \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{3x^2}{4} \Big|_1^e \\ &= \frac{3e^2}{2} - \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Pentru al doilea termen,

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e = \frac{1}{2}.$$

Prin urmare,

$$\mathcal{A} = \frac{3e^2}{4} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3e^2 + 5}{4}.$$